МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского**

Е.Л. Панкратов

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и
предпринимательства для студентов ННГУ, обучающихся
по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность»

Нижний Новгород
2019

УДК 517.958 (075)
ББК В311
П-16

П-16 Панкратов Е.Л.: ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ: Учебно- методическое пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. - 51 с.

Рецензент: **к.ф.-м.н., доцент Т.В. Лухманова**.

Учебно-методическое пособие «Основные вопросы аналитической геометрии» подготовлено для ознакомления студентов, обучающихся по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность». Оно содержит основные понятия о векторах и операциях с ними; прямой на плоскости и в пространстве, плоскости, их взаимном расположении; кривых и поверхностях второго порядка. Для закрепления теоретических знаний по аналитической геометрии в данном пособии приведены примеры решения задач и контрольные задания.

Ответственная за выпуск:
председатель методической комиссии ИЭП ННГУ,
к.э.н., доцент Едемская С.В.

УДК 517.958 (075)
ББК В311

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В данном пособии изложены основные понятия аналитической геометрии: о векторах и операциях с ними; прямой на плоскости и в пространстве, плоскости, их взаимном расположении; кривых и поверхностях второго порядка. Для закрепления теоретических знаний по аналитической геометрии в данном пособии приведены примеры решения задач и контрольные задания. Пособие ориентировано на развитие у студентов навыков графического представления функций многих переменных в рамках освоения компетенций ОПК-1 (Способность применять математический инструментарий для решения экономических задач) и ПК-1 (Способность подготавливать исходные данные, необходимые для расчета экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйственных субъектов) образовательного стандарта по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность», что соответствует разделу «Математический анализ» курса «Математика». В результате изучения данного раздела студенты должны знать основные понятия о векторах; прямой и плоскости; кривых и поверхностях второго порядка, а также уметь решать связанные с ними задачи.

Раздел 1. Векторы

Определение 1

Вектор - направленный отрезок, то есть отрезок, у которого указаны начало (точка приложения вектора) и конец. Обычно вектор обозначается как $\vec{a}$ или ***a***.

1.1. *Линейные операции над векторами*

Определение 2

Векторной суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор, соответствующий геометрической сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 1). Данный способ сложения называется правилом параллелограмма.

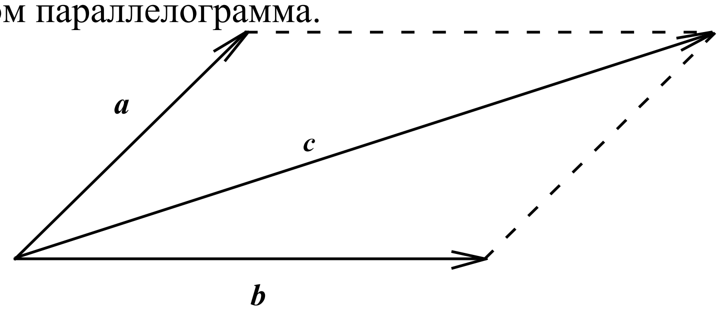


Рис. 1. Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

Определение 3

Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число λ является вектор, длина которого отличается от длины вектора $\vec{a}$ в $|\lambda|$ раз. В случае положительного λ новый вектор направлен в ту же сторону, что и исходный вектор. В случае отрицательного λ новый вектор направлен в противоположную по отношению к исходному вектору сторону (см. рис. 2).

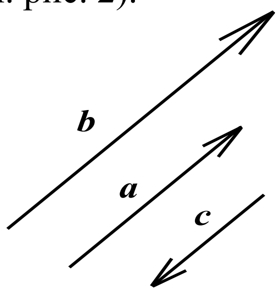


Рис. 2. Произведения вектора на число $\vec{b}=\lambda_1\,\vec{a}$, $\alpha>1$ и $\vec{c}=\lambda_2\,\vec{a}$, $-1<\beta<0$.

Определение 4

m векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, …, $\vec{e}_m$ линейно независимы, если из равенства

$$\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+...+\lambda_m\vec{e}_m=0$$

следует равенство

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0.$$

В противном случае векторы линейно зависимы. Любой вектор $\vec{a}$ m-мерного пространства может быть разложен по m линейно независимым векторам, т.е. может быть представлен в виде их линейной комбинации

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + ... + a_m \vec{e}_m .$$

Коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_m$ называются координатами вектора $\vec{a}$ по отношению к базису, определённому векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, …, $\vec{e}_m$. Если базисная система задана, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, … представляются упорядоченными системами координат ($a_1, a_2, \ldots, a_m$), ($b_1, b_2, \ldots, b_m$), … При этом $\vec{a} + \vec{b}$ и $\alpha \vec{a}$ представляются соответственно наборами координатами $a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_m+b_m$ и $\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_m$.

Пример 1

На плоскости xOy даны точки $A(4;2)$, $B(2;3)$ и $C(0;5)$, где $O(0,0)$ - начало координат. Разложим вектор $\overrightarrow{OA}$ по векторам $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Запишем данные вектора в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат с единичными векторами (ортами) $\vec{i}$ и $\vec{j}$ по осям соответственно $O\,x$ и $O\,y$: $\overrightarrow{OA} = (4-0)\vec{i} +$ $+(2-0)\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = (2-0)\vec{i} + (3-0)\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = (5-0)\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - единичные вектора (орты) вдоль осей абсцисс и ординат, единичный вектор вдоль оси аппликат обозначается $\vec{k}$. Поскольку вектор $\overrightarrow{OA}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, тогда $\overrightarrow{OA} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{OB} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{OC}$, где λ_1 и λ_2 - искомые коэффициенты разложения. В координатной форме последнее соотношение имеет вид

$$4\vec{i} + 2\vec{j} = \lambda_1 \cdot \left(2\vec{i} + 3\vec{j}\right) + \lambda_2 \cdot 5\vec{j} .$$

Далее приравниваем друг другу коэффициенты при $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в левой и правой частях данного соотношения. Тогда

$$\begin{cases} 4 = 2\,\lambda_1 \\ 2 = 3\,\lambda_1 + 5\,\lambda_2 \end{cases}$$

Решением такой системы являются следующие значения коэффициентов α и β: λ_1=2 и λ_2=-0,8. Таким образом, можно записать

$$\overrightarrow{OA} = 2 \cdot \overrightarrow{OB} - 0{,}8 \cdot \overrightarrow{OC} .$$

1.2. *Системы координат*

Следует заметить, что вектора были рассмотрены в так называемой "системе координат", т.е. относительно специфических линий (в данном случае - прямых, называемых "координатными прямыми"). В данном разделе сравним несколько наиболее распространённых систем координат.

Системы координат на плоскости

Декартова система координат

Если в пространстве задана правая прямоугольная система координат, то единичные векторы (орты) $\vec{i}$, $\vec{j}$ осей Ox, Oy соответственно образуют систему базисных векторов. Координаты a_x, a_y вектора

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

называются декартовыми (прямоугольными) координатами вектора $\vec{a}$. Следует заметить, что модуль вектора $\vec{a}$ может быть определён с помощью следующего соотношения:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} .$$

Координаты a_x, a_y определяются следующим образом

$$a_x = |\vec{a}|\cos\varphi , \ a_y = |\vec{a}|\sin\varphi ,$$

где φ - угол между вектором $\vec{a}$ и осью абсцисс.

Системы координат в пространстве

Декартова система координат

Если в пространстве задана правая прямоугольная система координат, то единичные векторы (орты) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ осей Ox, Oy, Oz соответственно образуют систему базисных векторов. Координаты a_x, a_y, a_z вектора

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

называются декартовыми (прямоугольными) координатами $\vec{a}$. Направление оси Oz перпендикулярно осям Ox, Oy и совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его повороте от Ox к Oy на угол, меньший π. Следует заметить, что модуль вектора $\vec{a}$ может быть определён с помощью следующего соотношения:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ определяются следующими соотношениями:

$$\cos(\alpha) = a_x / |\vec{a}|, \ \cos(\beta) = a_y / |\vec{a}|, \ \cos(\gamma) = a_z / |\vec{a}| .$$

Причём направляющие косинусы удовлетворяют соотношению:

$$cos^2(\alpha)+cos^2(\beta)+cos^2(\gamma)=1.$$

Цилиндрическая система координат

Цилиндрическими координатами являются полярные координаты r и φ в плоскости, перпендикулярной оси z, и ось z. Соотношения, связывающие цилиндрические и декартовые координаты, имеют следующий вид:

$$x = r\,cos(\varphi);\ y = r\,sin(\varphi);\ z = z.$$

для перехода от цилиндрической системы координат к декартовой и

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ tg(\varphi) = y/x,\ x \neq 0;\ z = z$$

для перехода от декартовой системы координат к цилиндрической.

Сферическая система координат

В сферической системе координат присутствуют три координаты: длина радиус -вектора r, долгота φ (угол в плоскости OXY с положительным направлением от OX к OY) и полярное расстояние θ (угол в плоскости OYZ с положительным направлением от OZ к OY). Если сферические координаты изменяются в следующих пределах:

$$0 \le r < \infty;\ -\pi < \varphi \le \pi;\ 0 \le \theta \le \pi,$$

то получатся однозначно все точки пространства. Координатными поверхностями в данном случае являются сферы с центром в начале координат ($r = const$); полуплоскости, ограниченные осью z ($\varphi = const$); конусы, для которых ось z является осью ($\theta = const$). Связь между декартовыми и сферическими координатами осуществляется с помощью следующих соотношений:

$$x = r\,sin(\theta)cos(\varphi);\ y = r\,sin(\theta)sin(\varphi);\ z = r\,cos(\theta).$$

для перехода от сферической системы координат к декартовой и

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ;\ tg(\varphi) = y/x,\ x \neq 0;\ tg(\theta) = \sqrt{x^2 + y^2} \Big/ z.$$

для перехода от декартовой системы координат к сферической.

1.3. *Скалярное произведение векторов*

Определение 5

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является следующий скаляр

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\varphi),$$

где $\varphi = \vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Из данного соотношения следует, что два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимноперпендикулярны тогда и только тогда, когда $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$. Скалярное произведение представимо также в следующем виде

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = b \cdot np_{\vec{b}}\vec{a},$$

где $np_{\vec{a}}\vec{b} = b \cdot \cos(\gamma)$ проекция вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, $np_{\vec{b}}\vec{a} = a \cdot \cos(\gamma)$ проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения

<u>Векторные соотношения</u>

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right);\ \left(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{c}\right);\ \left(\lambda\,\vec{a},\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{b},\vec{a}\right);\ \left(\vec{a},\vec{a}\right)=\left|\vec{a}\right|^2\geq 0;$$

$$\left|\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|\leq\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|,$$

где $\left|\vec{a}\right|$ - длина (модуль) вектора $\vec{a}$, α - скаляр.

<u>Выражения в прямоугольных декартовых координатах</u>

$$\left(\vec{i},\vec{i}\right)=\left(\vec{j},\vec{j}\right)=\left(\vec{k},\vec{k}\right)=1;\ \left(\vec{i},\vec{j}\right)=\left(\vec{j},\vec{k}\right)=\left(\vec{k},\vec{i}\right)=0;\ a_x=\left(\vec{a},\vec{i}\right);\ a_y=\left(\vec{a},\vec{j}\right);$$

$$a_z=\left(\vec{a},\vec{k}\right);\ \left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},$$

где a_x, a_y и a_z – проекции вектора $\vec{a}$ на оси Ox, Oy и Oz декартовой системы координат. Отношения данных проекций и модуля вектора $\vec{a}$

$$\cos(\alpha)=a_x/\left|\vec{a}\right|,\ \cos(\beta)=a_y/\left|\vec{a}\right|,\ \cos(\gamma)=a_z/\left|\vec{a}\right|$$

называют направляющими косинусами вектора $\vec{a}$ (α, β и γ - углы между вектором $\vec{a}$ и осями Ox, Oy и Oz декартовой системы координат). В двухмерном случае используются следующие отношения проекций и модуля вектора $\vec{a}$

$$\cos(\alpha)=a_x/\left|\vec{a}\right|,\ \sin(\alpha)=a_y/\left|\vec{a}\right|,$$

где α - угол между вектором $\vec{a}$ и осью абсцисс.

<u>Пример 2</u>

Найдём скалярное произведение векторов $\vec{a}=4\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+6\vec{j}+11\vec{k}$. Вычислим искомое произведение с помощью определения скалярного произведения и второго из его перечисленных свойств позволяет получить

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(4\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}\right)\cdot\left(2\vec{i}+6\vec{j}+11\vec{k}\right)=8+42+33=83.$$

<u>Пример 3</u>

Даны точки $A(a;0;0)$ и $B(0;0;2a)$. Найдём расстояние между ними. Такая задача может быть сведена к задаче о нахождении длины вектора $\overrightarrow{AB}=-a\cdot\vec{i}+2a\cdot\vec{k}$. Определим данную длину с помощью стандартного соотношения, т.е.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{AB_x^2+AB_y^2+AB_z^2}=\sqrt{a^2\left(\vec{i},\vec{i}\right)+4a^2\left(\vec{k},\vec{k}\right)}=a\sqrt{5}.$$

1.4. *Векторное произведение векторов*

Определение 6

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right],$$

модуль которого равен

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\varphi),$$

а его направление перпендикулярно перемножаемым векторам и совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его повороте от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ на угол, меньший π (см. рис. 3). Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется правой. Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $-\vec{c}$ называется левой. Два вектора параллельны друг другу (линейно зависимы) тогда, когда их векторное произведение равно нулю.

Свойства векторного произведения

Основные соотношения

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]; \ \left[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{a}, \vec{c}\right]; \ \left[(\alpha\, \vec{a}), \vec{b}\right] = \alpha \left[\vec{a}, \vec{b}\right]; \ \left[\vec{a}, \vec{a}\right] = 0 .$$

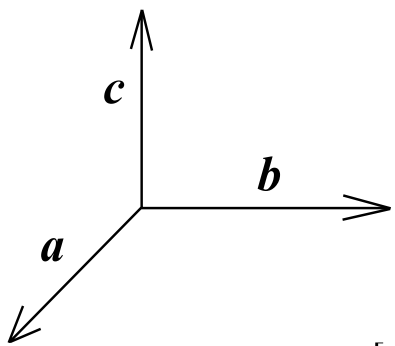


Рис. 3. Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

Выражения в любом базисе векторов (любой системе координат) $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 ; \ \vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3 ; \ \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} [\vec{e}_2 \vec{e}_3] & \alpha_1 & \beta_1 \\ [\vec{e}_3 \vec{e}_1] & \alpha_2 & \beta_2 \\ [\vec{e}_1 \vec{e}_2] & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} .$$

Выражения в прямоугольных декартовых координатах

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \vec{i}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) -$$

$$-\vec{j}\left(a_x b_z - a_z b_x\right) + \vec{k}\left(a_x b_y - a_y b_x\right);\ \left[\vec{i},\vec{i}\right] = \left[\vec{j},\vec{j}\right] = \left[\vec{k},\vec{k}\right] = 0;\ \left[\vec{i},\vec{j}\right] = \vec{k};\ \left[\vec{k},\vec{j}\right] = \vec{i};\ \left[\vec{k},\vec{i}\right] = \vec{j}.$$

Пример 4

Определим вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a},\vec{b}\right]$, если: $\vec{a} = 3\vec{i}$, $\vec{b} = 2\vec{k}$. Один из способов нахождения вектора $\vec{c}$ заключается в применении стандартного определения, в рамках которого данный вектор перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и составляет с ними правую тройку векторов. Тогда

$$\vec{c} = 3\vec{i} \times 2\vec{k} = 6\left[\vec{i},\vec{k}\right] = -6\,\vec{j}.$$

Вычислим вектор $\vec{c}$ с помощью определителя. Тогда

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = -6\,\vec{j}\cdot$$

1.4. *Смешанное (векторно-скалярное) произведение векторов*

Определение 7

Смешанное произведение трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ является скаляром, определяемым с помощью следующего соотношения

$$d = \left(\vec{a},\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]\right).$$

Свойства смешанного произведения

Основные соотношения

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right) \equiv \left(\vec{b},\left[\vec{c},\vec{a}\right]\right) \equiv \left(\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right) \equiv -\left(\vec{b},\left[\vec{a},\vec{c}\right]\right) \equiv -\left(\vec{c},\left[\vec{b},\vec{a}\right]\right) \equiv -\left(\vec{a},\left[\vec{c},\vec{b}\right]\right),$$

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)^2 \equiv (\vec{a},\vec{a})\cdot\left(\vec{b},\vec{b}\right)\cdot(\vec{c},\vec{c}) - (\vec{a},\vec{a})\cdot\left(\vec{b},\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b},\vec{c}\right) - \left(\vec{b},\vec{b}\right)\cdot(\vec{c},\vec{a})\cdot(\vec{c},\vec{a}) -$$

$$-(\vec{c},\vec{c})\cdot\left(\vec{a},\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a},\vec{b}\right) + 2\left(\vec{a},\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b},\vec{c}\right)\cdot(\vec{c},\vec{a}) = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & \left(\vec{a},\vec{b}\right) & (\vec{a},\vec{c}) \\ \left(\vec{b},\vec{a}\right) & \left(\vec{b},\vec{b}\right) & \left(\vec{b},\vec{c}\right) \\ (\vec{c},\vec{a}) & \left(\vec{c},\vec{b}\right) & (\vec{c},\vec{c}) \end{vmatrix}\cdot$$

Данный определитель называется определителем Грамма. Если $\vec{c} = \vec{a}$ или $\vec{c} = \vec{b}$, то перестановкой векторов в смешанном произведении можно получить, что d=0.

Выражения в любом базисе векторов (любой системе координат) $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3;\ \vec{b} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3;\ \vec{c} = \gamma_1\vec{e}_1 + \gamma_2\vec{e}_2 + \gamma_3\vec{e}_3,$$

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}\left(\vec{e}_1,\left[\vec{e}_2,\vec{e}_3\right]\right).$$

Выражение в прямоугольных декартовых координатах

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)=\begin{vmatrix}a_x & b_x & c_x\\ a_y & b_y & c_y\\ a_z & b_z & c_z\end{vmatrix}.$$

Данный определитель положителен, если вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - правая тройка, и отрицателен в противоположном случае. Равенство нулю определителя показывает компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (т.е. вектора лежат в одной плоскости).

Пример 5

Определим смешанное произведение d векторов $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{b}=-3\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{c}=2\vec{j}+5\vec{k}$. Для этого вычислим определитель

$$d=\begin{vmatrix}3 & 4 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 5\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}0 & -3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=3\cdot\left(-15-2\right)-4\cdot 0+0=-51.$$

Отрицательное значение определителя свидетельствует о том, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют левую тройку.

Пример 6

Покажем, что векторы $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ и $\vec{c}=-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$ компланарны и разложим вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для этого вычислим смешанное произведение данных векторов

$$d=\left(\vec{a}\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]\right)=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -3 & -4\\ -3 & 12 & 6\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-3 & -4\\ 12 & 6\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & -4\\ -3 & 6\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & 12\end{vmatrix}$$

$$=-\left[(-3)\cdot 6-(-4)\cdot 12\right]-3\cdot\left[2\cdot 6-(-4)\cdot(-3)\right]+2\cdot\left[2\cdot 12-(-3)\cdot(-3)\right]=$$

$$=-\left(-18+48\right)-3\cdot\left(12-12\right)+2\cdot\left(24-9\right)=-30-0+30=0.$$

Полученное значение смешанного произведения подтверждает компланарность рассмотренных векторов. Далее разложим вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для решения второй части данной задачи представим вектор $\vec{c}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{c} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b}$$

и определим коэффициенты разложения λ_1 и λ_2. Подстановка векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в последнее соотношение позволяет получить

$$-3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k} = \lambda_1 \cdot \left(-\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}\right) + \lambda_2 \cdot \left(2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}\right).$$

Приравнивание коэффициентов при векторах $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ в левой и правой частях данного уравнения приводит к следующей системе уравнений для коэффициентов λ_1 и λ_2

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta = -3 \\ 3\alpha + 3\beta = 12 \\ 2\alpha - 4\beta = 6 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \alpha - 2\beta = 3 \\ \alpha + \beta = 4 \\ \alpha - 2\beta = 3 \end{cases}.$$

Решение первых двух уравнений позволяет получить: $\lambda_1=5$, $\lambda_2=1$. При этом третье уравнение системы удовлетворяется. Таким образом, можно записать

$$\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}.$$

1.6. *Геометрические приложения векторной алгебры*

1) Длина вектора $\vec{a}$ может быть определена с помощью скалярного умножения данного вектора самого на себя и последующего извлечения квадратного корня из полученного соотношения, т.е.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}.$$

В декартовой системе координат, когда $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, данное соотношение имеет следующий вид

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

<u>Пример 7</u>

Найдём длину вектора $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Для решения данной задачи умножаем вектор скалярно на самого себя и извлекаем из полученного соотношения квадратный корень, т.е.

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(-\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}, -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\vec{i}, \vec{i}\right) - 6\left(\vec{i}, \vec{j}\right) - 4\left(\vec{i}, \vec{k}\right) + 9\left(\vec{j}, \vec{j}\right) + 12\left(\vec{j}, \vec{k}\right) + 4\left(\vec{k}, \vec{k}\right)} =$$

$$= \sqrt{1 - 6 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 9 + 12 \cdot 0 + 4} = \sqrt{14} \approx 3{,}74.$$

2) Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ может быть определён с помощью соотношения

$$\cos(\varphi) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{\sqrt{(\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b})}},$$

которое следует из определения скалярного произведения 3.5. В декартовой системе координат такое выражение имеет вид

$$\cos(\varphi) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}.$$

<u>Пример 8</u>

Вернёмся к векторам, рассмотренным в Примере 2, т.е. $\vec{a} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 11\vec{k}$. Скалярное произведение данных векторов, согласно Примеру 2, равно 83. Найдём длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по аналогии с Примером 7. Тогда

$$|\vec{a}| = \sqrt{(4\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}, 4\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k})} =$$

$$= \sqrt{16(\vec{i},\vec{i}) + 56(\vec{i},\vec{j}) + 24(\vec{i},\vec{k}) + 49(\vec{j},\vec{j}) + 42(\vec{j},\vec{k}) + 9(\vec{k},\vec{k})} =$$

$$= \sqrt{16 + 56\cdot 0 + 24\cdot 0 + 49 + 42\cdot 0 + 9} = \sqrt{74} \approx 8{,}60.$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(2\vec{i} + 6\vec{j} + 11\vec{k}, 2\vec{i} + 6\vec{j} + 11\vec{k})} =$$

$$= \sqrt{4(\vec{i},\vec{i}) + 24(\vec{i},\vec{j}) + 44(\vec{i},\vec{k}) + 36(\vec{j},\vec{j}) + 132(\vec{j},\vec{k}) + 121(\vec{k},\vec{k})} =$$

$$= \sqrt{4 + 24\cdot 0 + 44\cdot 0 + 36 + 132\cdot 0 + 121} = \sqrt{161} \approx 12{,}69.$$

Далее подставим значения скалярного произведения и модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в соответствующее соотношение для косинуса угла между векторами, что приводит к следующему результату

$$\cos(\varphi) = \frac{83}{\sqrt{74\cdot 161}} \approx 0{,}76.$$

Данному значению косинуса соответствует угол

$$\varphi \approx 45{,}04^\circ = 45^\circ 2' 24''.$$

Пример 9

Даны два вектора $\vec{a}=3\vec{m}+4\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}$, где $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен 60°. Найдём угол между данными векторами. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а также их длины соответственно равны

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(3\vec{m}+4\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{m}-3\vec{n}\right)=3\left(\vec{m},\vec{m}\right)+4\left(\vec{n},\vec{m}\right)-9\left(\vec{n},\vec{m}\right)-12\left(\vec{n},\vec{n}\right)=$$

$$=3|\vec{m}|^2-5|\vec{m}||\vec{n}|\cos\left(\vec{m}\wedge\vec{n}\right)-12|\vec{n}|^2=3-2{,}5-12=12{,}5,$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{\left(3\vec{m}+4\vec{n}\right)\cdot\left(3\vec{m}+4\vec{n}\right)}=\sqrt{9|\vec{m}|^2+24|\vec{m}||\vec{n}|\cos\left(\vec{m}\wedge\vec{n}\right)+16|\vec{n}|^2}=$$

$$=\sqrt{9|\vec{m}|^2+24|\vec{m}||\vec{n}|\cos\left(\vec{m}\wedge\vec{n}\right)+16|\vec{n}|^2}=\sqrt{9+12+16}=\sqrt{37}\approx 6{,}08,$$

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{m}-3\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{m}-3\vec{n}\right)}=\sqrt{|\vec{m}|^2-6|\vec{m}||\vec{n}|\cos\left(\vec{m}\wedge\vec{n}\right)+9|\vec{n}|^2}=\sqrt{1-3+9}=\sqrt{7}\approx 2{,}65.$$

Далее определим угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с помощью стандартного соотношения

$$\cos\left(\varphi\right)=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}=\frac{12{,}5}{\sqrt{259}}\approx 0{,}78$$

Тогда

$$\gamma\approx 38{,}74°.$$

3) Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 4). Площадь данного параллелограмма численно равна модулю векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е.

$$S_p=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|.$$

В декартовой системе координат данное соотношение принимает вид

$$S_p=\sqrt{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}^2}.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна половине площади параллелограмма (см. рис. 4)

$$S_t=S_p/2.$$

Пример 10

Определим площади параллелограмма и треугольника, построенных на векторах $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$, а также длину высоты параллелограмма, опущенной на вектор $\vec{a}$. На первом этапе с помощью стандартных операций векторного умножения двух векторов и вычисления модуля вектора определим площадь параллелограмма, т.е.

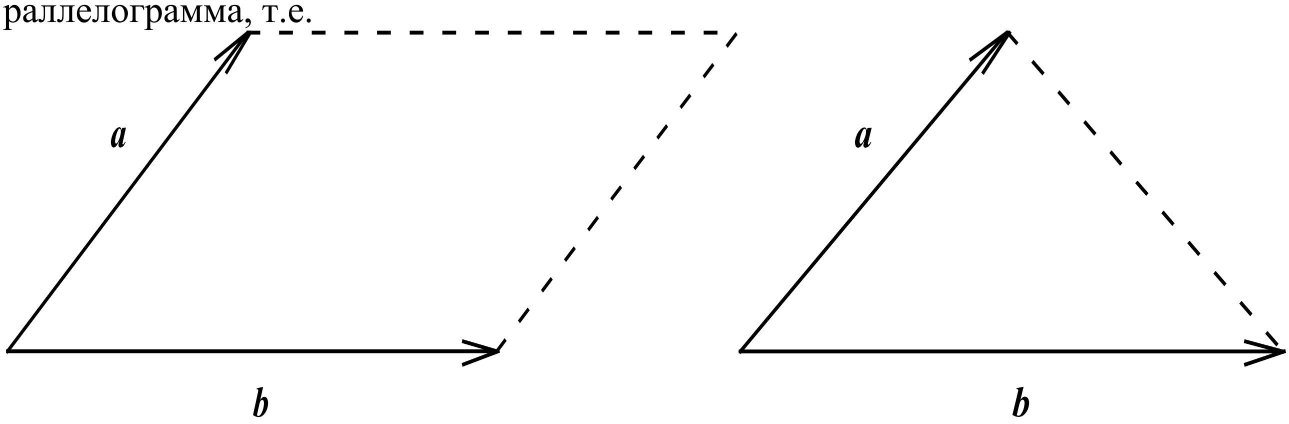


Рис. 4. Параллелограмм и треугольник, построенные на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\vec{c} = \left[\vec{a}\,\vec{b}\right] = \left[\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j}\right] = \left[\vec{i}, \vec{i}\right] + \left[\vec{j}, \vec{i}\right] - \left[\vec{i}, \vec{j}\right] - \left[\vec{j}, \vec{j}\right] = 0 - 2\left[\vec{i}, \vec{j}\right] - 0 = -2\vec{k},$$

$$S_p = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = 2.$$

Площадь треугольника также найдём с помощью соотношения $S_t = S_p/2$. В данном случае площадь треугольника равна $S_t = 1$. Длина высоты параллелограмма может быть вычислена как отношение площади параллелограмма к длине стороны, на которую опускается высота, т.е. $h = S_p / \left|\vec{a}\right|$. Тогда

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{i} + \vec{j}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

что позволяет получить

$$h = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

<u>Пример 11</u>

Вернёмся к векторам, рассмотренным в Примере 9, и определим площади параллелограмма и треугольника, построенных на данных векторах. На первом этапе с помощью стандартных операций векторного умножения двух векторов и вычисления модуля вектора определим площадь параллелограмма, т.е.

$$\vec{c} = \left(3\vec{m} + 4\vec{n}\right) \times \left(\vec{m} - 3\vec{n}\right) = 3\left(\vec{m}, \vec{m}\right) + 4\left(\vec{n}, \vec{m}\right) - 9\left(\vec{m}, \vec{n}\right) - 12\left(\vec{n}, \vec{n}\right) =$$

$$= 3\left[\vec{m}, \vec{m}\right] - 13\left[\vec{m}, \vec{n}\right] - 12\left[\vec{n}, \vec{n}\right] = 3 \cdot 0 - 13 \cdot \left[\vec{m}, \vec{n}\right] - 2 \cdot 0 = -13 \cdot \left[\vec{m}, \vec{n}\right],$$

$$S_p = \left|-13\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = 13\left|\left[\vec{m}, \vec{n}\right]\right| = 13\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\sin\left(\gamma\right) \approx 11{,}26.$$

Площадь треугольника также найдём с помощью соотношения $S_t = S_p/2$. В данном случае площадь треугольника равна $S_t \approx 5{,}63$. Длина высоты параллелограмма может быть вычислена как отношение площади параллелограмма к длине стороны, на которую опускается высота, т.е. $h = S_p / |\vec{a}|$. Тогда

$$|\vec{a}| = |(3\vec{m} + 4\vec{n})| = \sqrt{(3\vec{m} + 4\vec{n}) \cdot (3\vec{m} + 4\vec{n})} = \sqrt{9(\vec{m},\vec{m}) + 24(\vec{m},\vec{n})\cos(\vec{m} \wedge \vec{n}) + 16(\vec{n},\vec{n})} =$$

$$= \sqrt{9 + 12 + 16} = \sqrt{37} \approx 6{,}08,$$

что позволяет получить

$$h \approx \frac{5{,}63}{6{,}08} \approx 0{,}93.$$

4) Объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, численно равен смешанному произведению данных векторов или его модулю для левой тройки векторов с коэффициентом 1/6, т.е.

$$V_{pyr} = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]\right)\right|.$$

В декартовой системе координат данное соотношение принимает вид

$$V_{pyr} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Знак перед определителем выбирается в зависимости от того, правой или левой является тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

<u>Пример 12</u>

Даны вершины пирамиды $A(2,-1,2)$, $B(5,2,0)$, $C(2,5,0)$ и $D(1,2,4)$. Найдём объём пирамиды, площадь грани ABC и длину высоты, опущенной на эту грань.

Для вычисления площади грани ABC с помощью векторного произведения необходимо определить любые два из трёх векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ или $\overrightarrow{BC}$. Для вычисления объёма пирамиды необходимо определить любые три некомпланарных вектора, соединяющие вершины пирамиды. По этой причине на первом этапе найдём необходимые вектора. Для нашего случая вычисление проекций векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ приводит к следующему результату: т.е. $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = 6\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Далее площадь треугольника ABC и объём пирамиды $ABCD$ определим с помощью стандартных соотношений, включающих в себя соответственно векторное и смешанное произведения векторов, т.е.

$$S_p = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} \left(\overrightarrow{AB}\right)_y & \left(\overrightarrow{AB}\right)_z \\ \left(\overrightarrow{AC}\right)_y & \left(\overrightarrow{AC}\right)_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \left(\overrightarrow{AB}\right)_z & \left(\overrightarrow{AB}\right)_x \\ \left(\overrightarrow{AC}\right)_z & \left(\overrightarrow{AC}\right)_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \left(\overrightarrow{AB}\right)_x & \left(\overrightarrow{AB}\right)_y \\ \left(\overrightarrow{AC}\right)_x & \left(\overrightarrow{AC}\right)_y \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{324+36+324} = \sqrt{684} \approx 21{,}15\,.$$

$$V_{pyr} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left[3\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\right] = \frac{18+18+36}{6}.$$

5) Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, численно равен смешанному произведению данных векторов или его модулю, если вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ являются левой тройкой, т.е.

$$V_{par} = \left|\left(\vec{c}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right)\right|.$$

В декартовой системе координат данное соотношение принимает вид

$$V_{par} = \pm\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Знак перед определителем выбирается в зависимости от того, правой или левой является тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Пример 13

Вычислим объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$. Правой или левой будет тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$?

Для вычисления объёма найдём смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Искомое произведение может быть определено с помощью стандартного определителя

$$\left(\vec{c}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Подстановка проекций векторов в данное соотношение позволяет получить

$$\left(\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)=\begin{vmatrix}3 & 4 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 5\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}0 & -3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=3\cdot(-17)=-51.$$

Таким образом, объём параллелепипеда равен $V_p = 51$, а знак значения смешанного произведения свидетельствует о том, что тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ левая.

Пример 14

Вычислим объём параллелепипеда $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$, если известны координаты вершин $A_1(2,-1,-2)$, $B_1(1,2,1)$, $C_1(2,3,0)$, $D_2(5,0,-5)$. В данном параллелепипеде вершины A_1, B_1 и C_1 принадлежат одной грани параллелепипеда, а вершина D_2 - к противоположной грани; рёбра B_1B_2 и D_1D_2 являются противоположными. Для вычисления объёма параллелепипеда необходимо определить три его ребра в различных измерениях, например A_1B_1, A_1C_1 и D_1D_2. Далее искомый объём может быть определён как смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{D_1D_2}$. Однако, вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ известны ($\overrightarrow{A_1B_1}=-\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$, $\overrightarrow{A_1C_1}=4\vec{j}+2\vec{k}$), а для определения вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$ необходимо найти координаты точки D_1. Обозначим искомые координаты как x, y и z. Для определения искомых координат воспользуемся параллельностью рёбер A_1B_1 и C_1D_1 параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, что позволяет записать следующее соотношение

$$\left[\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{C_1D_1}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & 3\\ x-2 & y-3 & z-0\end{vmatrix}=0.$$

Элементы третьей строки в данном определителе являются проекциями вектора $\overrightarrow{C_1D_1}$ соответственно на оси абсцисс, ординат и аппликат. Вычисление определителя позволяет получить

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & 3\\ x-2 & y-3 & z-0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3 & 3\\ y-3 & z-0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ x-2 & z-0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ x-2 & y-3\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left[3z-3(y-3)\right]-\vec{j}\left[-z-3(x-2)\right]+\vec{k}\left[-(y-3)-3(x-2)\right].$$

Условие равенства нулю данного вектора приводит к необходимости решения следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \quad\;\; -3y+3z+9=0 \\ -3x \qquad\; -z+6=0 \\ -3x-y \qquad\; +9=0 \end{cases}.$$

Сокращением в уравнениях данной системы множителей, общих для всех слагаемых, преобразуем ее к более простой форме

$$\begin{cases} \quad\; y-z=3 \\ 3x \quad +z=6 \\ 3x+y \quad\; =9 \end{cases}.$$

Найдём решение этой системы по правилу Крамера. Для этого вычислим определитель матрицы, элементами которой являются коэффициенты при неизвестных в левых частях соответствующих уравнений, т.е.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Значение данного определителя равно нулю. Таким образом, одно из уравнений исходной системы уравнений для искомых координат является линейно зависимым от остальных. По этой причине найдём решение только первых двух уравнений, что приводит к следующему результату

$$\begin{cases} x=2-z/3 \\ y=3+z \end{cases}.$$

Подстановка полученных соотношений в третье уравнение исходной системы приводит к тождественному равенству левой и правой частей данного уравнения, что свидетельствует о правильности полученного решения исходной системы уравнений. Далее для нахождения координаты z точки D_1 воспользуемся равенством рёбер A_1B_1 и C_1D_1, что эквивалентно равенству длин векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$. Равенство рёбер может быть записано в виде

$$\sqrt{(A_1B_1)_x^2+(A_1B_1)_y^2+(A_1B_1)_z^2}=\sqrt{(C_1D_1)_x^2+(C_1D_1)_y^2+(C_1D_1)_z^2}.$$

С учётом значений координат точек A_1, B_1, C_1 и D_1 данное соотношение представимо в следующей форме

$$\sqrt{(-1)^2+3^2+3^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+z^2}.$$

После подстановки полученных зависимостей между x и z, а также между y и z и приведения подобных получаем

$$\sqrt{19}=\sqrt{(2-z/3-2)^2+(3+z-3)^2+z^2}\ .$$

После приведения подобных в правой части равенства получаем

$$\sqrt{19}=z\sqrt{19/9}\ .$$

Тогда $z=3$. При таком значении координаты z остальные координаты точки D_1 принимают значения $x=1$ и $y=6$, т.е. $D_1(1,6,3)$. Теперь вектор $\overrightarrow{D_1D_2}$ определён и может быть представлен в следующем виде: $\overrightarrow{D_1D_2}=4\vec{i}-6\vec{j}-8\vec{k}$.

На следующем этапе решения задачи найдём искомый объём параллелепипеда $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$. Смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{D_1D_2}$ определяется с помощью стандартного соотношения

$$\left(\overrightarrow{D_1D_2}\cdot\left[\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1C_1}\right]\right)=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 2\\ 4 & -6 & -8\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}4 & 2\\ -6 & -8\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}0 & 2\\ 4 & -8\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}0 & 4\\ 4 & -6\end{vmatrix}=$$

$$=-1\cdot(-32+12)-3\cdot(-8)+3\cdot(-16)=20+24-48=-4.$$

Таким образом, объём параллелепипеда $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ равен 4. Альтернативным методом нахождения объёма данного параллелепипеда является вычисление объёма пирамиды, построенной на векторах $\overrightarrow{A_1D_2}$, $\overrightarrow{B_1D_2}$ и $\overrightarrow{C_1D_2}$. Далее вычисленный объём умножается на 6.

Раздел 2. *Прямая на плоскости*

Определение 8

Функция $F(x,y)=0$ является общим уравнением линии на плоскости.

Определение 9

Линия на плоскости называется алгебраической, если существует такая декартова система координат, в которой линия $F(x,y)=0$ является многочленом. Любая неалгебраическая линия называется трансцендентной.

Пример 15

$x^1y^1-1=0$ – линия второго порядка (гипербола). Сумма степеней множителей называется порядком линии.

Пример 16

$y^2-e^x=0$ – неалгебраическая (трансцендетная) линия.

Замечание 1

Если линия в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется алгебраическим уравнением степени n, то эта линия и в любой другой декартовой прямоугольной системе координат определяется алгебраическим уравнением той же степени n.

Способы задания прямой на плоскости

Уравнение $Ax+By+C=0$ является общим уравнением прямой. Его можно преобразовать к следующему виду: $y=-(Ax+C)/B$. Введём обозначения: $k=-A/B$, $b=-C/B$. Уравнение вида: $y=kx+b$ называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k. Данный коэффициент равен тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс α (см. рис. 5). Рассмотрим две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_1(x_2,y_2)$ на прямой $y=kx+b$. Тангенс угла её наклона можно представить в следующем виде

$$k = tg(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

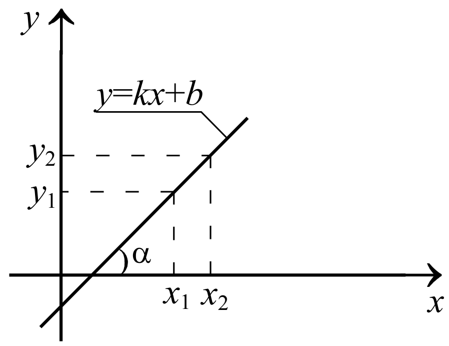


Рис. 5.

С другой стороны

$$k = \frac{y-b}{x}.$$

Тогда

$$\frac{y-b}{y_2 - y_1} = \frac{x}{x_2 - x_1}.$$

Параметр b может быть получен из условия $y_1=kx_1+b$. С учётом данного условия и соотношения (1) получаем уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_1(x_2,y_2)$, в следующей форме

$$\frac{y-y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x-x_1}{x_2 - x_1}.$$

Если в данном уравнении ввести обозначения $l=x_2-x_1$ и $m=y_2-y_1$, т.е.

$$\frac{y-y_1}{l} = \frac{x-x_1}{m},$$

получаем каноническое уравнение прямой. Зная угловой коэффициент, можно получить уравнение линии, проходящей через заданную точку $M_1(x_1,y_1)$. В данном случае $b=y_1-kx_1$. Тогда уравнение прямой с угловым коэффициентом преобразуется к следующему виду: $y-y_1=k(x-x_1)$. Далее умножим общее уравнение прямой на нормирующий множитель $\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Знак данного множителя противоположен знаку параметра C. Тогда получаем соотношение

$$\frac{A\,x}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{B\,y}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

С учётом известной связи между длинами катетом и гипотенузы для прямоугольного треугольника для параметров A, B и C, получаем: $A^2+B^2=C^2$ преобразуем данное соотношение к следующему виду: $x\cdot cos(\alpha)+y\cdot sin(\alpha)=p$, α - угол между прямой и осью абсцисс, $p>0$. Данное уравнение прямой известно как нормальное.

Далее разделим общее уравнение прямой на $-C$. Тогда: $-(A/C)x-(B/C)y=1$. Далее введём следующие обозначения: $a=-A/C$ и $b=-B/C$, что приводит уравнение прямой к следующему виду: $(x/a)+y/b=1$. Данное уравнение называется уравнением прямой в отрезках. Данная прямая отсекает отрезки a и b (с учётом знака) от координатных осей.

Используется также параметрическое уравнение прямой $x=x_0+x_1t$, $y=y_0+y_1t$, (t - параметр), а в n-мерном пространстве - векторное уравнение прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}\,t$.

Определение 10

Совокупность лежащих на заданной плоскости прямых, проходящих через некоторую точку M данной плоскости, называется пучком прямых с центом M.

Центр пучка полностью определяется заданием двух различных прямых этого пучка $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, пересечением которых и является точка M. Уравнение пучка прямых имеет вид: $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$.

В следующем примере рассмотрим некоторые задачи на прямую на плоскости.

Пример 17

Дан треугольник ABC, его вершины $A(3,2)$, $B(1,4)$ и $C(5,3)$. Определим:

1) уравнение прямых AC, BC, AB;
2) внутренние углы треугольника;
3) уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно стороне AC;
4) уравнение высоты, проведённой из точки B;
5) координаты точки B', симметричной точке B, относительно прямой AC (см. рис. 5);
6) расстояние от точки B до прямой AC.

1) Для нахождения сторон треугольника воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки. Подстановка соответствующих значений координат в данное уравнение позволяет получить

$$AC\colon \frac{x-3}{5-3} = \frac{y-2}{3-2};\ AB\colon \frac{x-3}{1-3} = \frac{y-2}{4-2};\ BC\colon \frac{x-1}{5-1} = \frac{y-4}{3-4}.$$

Приведение левых и правых частей данных уравнений к общему знаменателю позволяет записать их как уравнения с угловым коэффициентом, т.е.

$$AC\colon y=(x+1)/2;\ AB\colon y=-x+5;\ BC\colon y=-(x-11)/4.$$

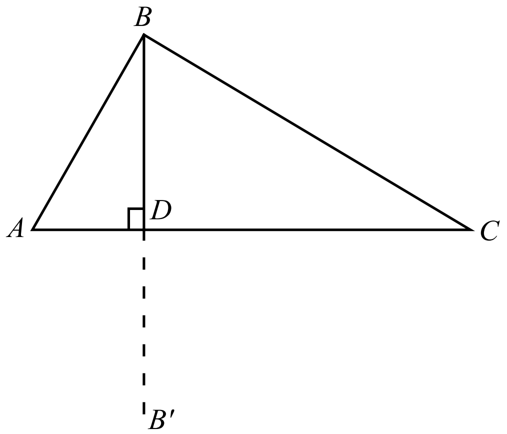


Рис. 6.

2) Угол $\angle A$ между прямыми AC и AB является разностью углов между данными прямыми и осью абсцисс, т.е. $\angle A=\alpha_{AC}-\alpha_{AB}$. Тогда $tg(\angle A)=tg(\alpha_{AC}-\alpha_{AB})$. Следующие тригонометрические преобразования позволяют получить связь между $tg(\angle A)$ и угловыми коэффициентами прямых AC и AB

$$tg(\angle A)=\frac{\sin(\alpha_{AC}-\alpha_{AB})}{\cos(\alpha_{AC}-\alpha_{AB})}=\frac{\sin(\alpha_{AC})\cos(\alpha_{AB})-\cos(\alpha_{AC})\sin(\alpha_{AB})}{\cos(\alpha_{AC})\cos(\alpha_{AB})+\sin(\alpha_{AB})\sin(\alpha_{AC})}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin(\alpha_{AC})\cos(\alpha_{AB})}{\cos(\alpha_{AC})\cos(\alpha_{AB})}-\dfrac{\cos(\alpha_{AC})\sin(\alpha_{AB})}{\cos(\alpha_{AC})\cos(\alpha_{AB})}}{\dfrac{\cos(\alpha_{AC})\cos(\alpha_{AB})}{\cos(\alpha_{AC})\cos(\alpha_{AB})}+\dfrac{\sin(\alpha_{AB})\sin(\alpha_{AC})}{\cos(\alpha_{AC})\cos(\alpha_{AB})}}=\frac{tg(\alpha_{AC})-tg(\alpha_{AB})}{1+tg(\alpha_{AC})tg(\alpha_{AB})}=\frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}k_{AB}}.$$

Аналогично можно получить связь между остальными углами треугольника ABC и соответствующими угловыми коэффициентами. Из полученного соотношения можно получить, что (i) две прямые $y_1=y_2$ параллельны друг другу, если их угловые коэффициенты равны $k_1=k_2$, (ii) две прямые $y_1=y_2$ перпендикулярны друг другу, если их угловые коэффициенты удовлетворяют условию $1+k_1k_2=0$. Вычисление искомых углов с помощью последнего соотношения приводит к следующему результату

$$tg(\angle A)=\frac{0,5+1}{1-0,5}=\frac{1,5}{0,5}=3;\; tg(\angle B)=\frac{-1+0,25}{1+0,25}=\frac{-0,75}{1,25}=-\frac{3}{5};$$

$$tg(\angle C)=\frac{1+0,25}{1+0,125}=\frac{1,25}{1,125}=\frac{10}{9}.$$

Тогда

$$\angle A\approx 71,57°;\ \angle B\approx -30,96°;\ \angle C\approx 48,1°.$$

3) Далее найдём уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно стороне AC. В силу равенства угловых коэффициентов искомой прямой и пря-мой AC необходимое уравнение можно записать в следующем виде $y=b+x/2$. Параметр b может быть определён путём подстановки координат точки B в искомое уравнение прямой. Тогда в окончательном виде получаем: $y=(7+x)/2$.

4) Для нахождения высоты треугольника ABC, проведённой из точки B, воспользуемся условием перпендикулярности искомой прямой и прямой AC, т.е. $1+k_1k_2=0$. Тогда угловой коэффициент медианы равен k=-2. Параметр b также определим путём подстановки координат точки B в искомое уравнение прямой. Тогда в искомое уравнение может быть представлено в следующей форме: y=2(3-2x).

5) Координаты точки B', симметричной точке B, относительно прямой AC. Условие симметричности точки B' точке B относительно прямой AC позволяет записать: $|BD| = |B'D|$. Тогда координаты точки D могут быть определены как средние арифметические координат точек B и B', т.е.

$$x_D = \frac{x_B + x_{B'}}{2},\ y_D = \frac{y_B + y_{B'}}{2}.$$

Определим координаты точки D как точки пересечения двух прямых AC и BD. Тогда

$$\begin{cases} y = (x+1)/2 \\ y = 2(3-2x) \end{cases}.$$

После незначительных преобразований в окончательном виде получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 4x + y = 6 \end{cases}.$$

Решением данной системы являются следующие значения координат x и y: x =11/9, y=10/9, т.е. точка D имеет координаты D(11/9,10/9). Подстановка значений координат точек B и D в соотношение, связывающее их координаты с координатами точки B', позволяет получить искомые координаты: B'(13/9,-16/9).

6) Определим расстояние от точки B до прямой AC. Данное расстояние между прямой $Ex+Fy+G=0$ и точкой $B(x_0,y_0)$ может быть определено с помощью соотношения

$$\delta = \left| \frac{E x_0 + F y_0 + G}{\sqrt{E^2 + F^2}} \right|.$$

Подстановка координат точки B и коэффициентов прямой AC позволяет получить следующее значение искомого расстояния: $\delta = 4\sqrt{2}$.

<u>Замечание 2</u>

Если параметр δ отрицателен, то это свидетельствует о том, что точка B и начало координат лежат по одну сторону от прямой AC.

Раздел 3. *Плоскость и прямая в пространстве*

Определение 11

Рассмотрим уравнение $F(x,y,z)=0$. Геометрическое место точек данного уравнения называется поверхностью.

Определение 12

Если $F(x,y,z)$ - многочлен степени n, то геометрическое место точек - алгебраическая поверхность порядка n. Остальные поверхности называются трансцендентными.

Пример 13

$x^2y^3+z^2x^4+5=0$ – многочлен 6-ой степени (поверхность 6-го порядка).

Пример 14

Пусть есть линейное уравнение $A\,x+B\,y+C\,z+D=0$. Данное уравнение задаёт плоскость в пространстве. Следует заметить, что уравнение плоскости задаётся с точностью до постоянного множителя.

Способы задания плоскости

Плоскости могут быть заданы с помощью различных типов уравнений, которые могут быть получены по аналогии с соответствующими уравнениями прямой на плоскости. К основным уравнениям плоскости относятся следующие:

1) $x\cdot cos(\alpha)+y\cdot cos(\beta)+z\cdot cos(\gamma)=p$ - нормальное уравнение плоскости. Величины $cos(\alpha)$, $cos(\beta)$, $cos(\gamma)$ - направляющие косинусы плоскости, удовлетворяющие соотношению $cos^2(\alpha)+cos^2(\beta)+cos^2(\gamma)=1$;
2) $(x/a)+(y/b)+(z/b)=1$ - уравнение плоскости в отрезках. Оa, Оb и Оc - отрезки которые отсекает плоскости от координатных осей;
3) $x=x_0+x_1u+x_2v$, $y=y_0+y_1u+y_2v$, $z=z_0+z_1u+z_2v$ - параметрическое уравнение плоскости, где u и v - параметры;
4) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ или $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$ - уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$;
5) $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ - уравнение плоскости, проходящей через $M_1(x_1,y_1,z_1)$;
6) $A\,x+B\,y+C\,z+D=0 \Leftrightarrow (\vec{A},\vec{r})+D=0$ - общее уравнение плоскости.

Замечание 3

Нормальный вектор к плоскости может быть определён с помощью соотношения $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$, *где* $\vec{i}$, $\vec{j}$ *и* $\vec{k}$ *- единичные вектора (орты) по осям* Ox, Oy *и* Oz.

Замечание 4

Прямая в пространстве может быть задана как пересечение двух плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Способы задания прямой в пространстве

1) $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}\,t$ - векторное уравнение прямой.

2) $x=x_0+x_1t$, $y=y_0+y_1t$, $z=z_0+z_1t$ - параметрическое уравнение прямой в пространстве.

3) $(x-x_0)/l=(y-y_0)/m=(z-z_0)/n$ - каноническое уравнение прямой в пространстве.

Замечание 5

Направляющий вектор прямой может быть определён с помощью соотношения $\vec{P}=l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$.

4) $(x-x_1)/(x_2-x_1)=(y-y_1)/(y_2-y_1)=(z-z_1)/(z_2-z_1)$ - уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M(x_1,y_1,z_1)$ и $M(x_2,y_2,z_2)$.

5) $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{A}_1\vec{r}+D_1=0 \\ \vec{A}_2\vec{r}+D_2=0 \end{cases}$ - общее уравнение прямой в пространстве соответственно в скалярной и векторной формах (как пересечение двух плоскостей).

Замечание 6

Вектор $\vec{a}=\left[\vec{A}_1,\vec{A}_2\right]=\left(B_1C_2-B_2C_1\right)\vec{i}+\left(C_1A_2-C_2A_1\right)\vec{j}+\left(A_1B_2-A_2B_1\right)\vec{k}$ *является направляющим вектором прямой, заданной общим уравнением.*

Некоторые задачи на прямую на прямую в пространстве и плоскость

1) Рассмотрим две прямые в пространстве, заданные своими общими уравнениями: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}$. Найдём угол между данными прямыми. Такая задача сводится к определению угла φ между соответствующими направляющими векторами. Пользуясь определением скалярного произведения можно получить следующее соотношение для φ

$$\cos(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{\left(B_1C_2-B_2C_1\right)^2+\left(C_1A_2-C_2A_1\right)^2+\left(A_1B_2-A_2B_1\right)^2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\left(B_3C_4-B_4C_3\right)^2+\left(C_3A_4-C_4A_3\right)^2+\left(A_3B_4-A_4B_3\right)^2}}\left[\left(B_1C_2-B_2C_1\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(B_3C_4-B_4C_3\right)+\left(C_1A_2-C_2A_1\right)\left(C_3A_4-C_4A_3\right)++\left(A_1B_2-A_2B_1\right)\left(A_3B_4-A_4B_3\right)\right]. \quad (2)$$

Если уравнения прямых преобразовать к каноническому виду $(x-x_1)/l_1=(y-y_1)/m_1=(z-z_1)/n_1$ и $(x-x_2)/l_2=(y-y_2)/m_2=(z-z_2)/n_2$, тогда уравнение (2) упрощается

$$\cos(\varphi)=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \quad (2a)$$

Из соотношений (2) следует условие параллельности данных прямых, заключающееся в равенстве числителя данного соотношения его знаменателю, т.е.

$$\cos(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{\left(B_1C_2-B_2C_1\right)^2+\left(C_1A_2-C_2A_1\right)^2+\left(A_1B_2-A_2B_1\right)^2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\left(B_3C_4-B_4C_3\right)^2+\left(C_3A_4-C_4A_3\right)^2+\left(A_3B_4-A_4B_3\right)^2}}=\left[\left(B_1C_2-B_2C_1\right)\left(B_3C_4-B_4C_3\right)+\right.$$

$$+\left(C_1A_2-C_2A_1\right)\left(C_3A_4-C_4A_3\right)+\left(A_1B_2-A_2B_1\right)\left(A_3B_4-A_4B_3\right)\Big].$$

или

$$l_1/l_2=m_1/m_2=n_1/n_2.$$

Условие перпендикулярности данных прямых, заключающееся в равенстве нулю скалярного произведения, имеет вид

$$cos(\varphi)=[(B_1C_2\text{-}B_2C_1)(B_3C_4\text{-}B_4C_3)+(C_1A_2\text{-}C_2A_1)(C_3A_4\text{-}C_4A_3)+(A_1B_2\text{-}A_2B_1)(A_3B_4\text{-}A_4B_3)],$$

что эквивалентно следующему соотношению

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Пример 15

Пусть две прямые заданы уравнениями $(x\text{-}1)/2=(y+4)/3=(z\text{-}7)/5$ и $x=(y\text{-}3)/4=(z+1)/3$. Угол между данными прямыми равен

$$\cos(\varphi)=\frac{2+12+15}{\sqrt{4+9+25}\sqrt{1+16+9}}=\frac{29}{\sqrt{38}\sqrt{26}}\approx\frac{29}{31{,}43}\approx 0{,}92\,.$$

Тогда $\varphi\approx 22{,}69^{\circ}$.

2) Найдём угол между плоскостью, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, и прямой, заданной уравнением $(x\text{-}x_0)/l=(y\text{-}y_0)/m=(z\text{-}z_0)/n$. Такая задача сводится к определению угла φ между соответствующими направляющим и нормальным векторами. Поскольку угол φ является дополнительным к углу между направляющим вектором прямой и нормальным вектором рассмотренной плоскости, искомый угол можно определить с помощью следующего соотношения

$$\sin(\varphi)=\frac{A\,l+B\,m+C\,n}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\,.$$

Из данного соотношения следуют следующие условия соответственно параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

$$Al+Bm+Cn=0,\ A/l=B/m=C/n.$$

Пример 16

Рассмотрим плоскость $x+2y+3z+4=0$ и прямую $(x\text{-}1)/2=(y+4)/3=(z\text{-}7)/5$. Угол между данными прямой и плоскостью определяется с помощью следующего соотношения

$$\sin(\varphi)=\frac{2+2\cdot3+3\cdot5}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{2^2+3^2+5^2}}=\frac{23}{\sqrt{14}\sqrt{38}}\approx 0{,}997\,.$$

Тогда $\varphi\approx 85{,}69^{\circ}$.

3) Рассмотрим точку $M(x_0,y_0,z_0)$. Расстояние от данной точки до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ может быть определено с помощью следующего соотношения

$$\delta=\left|\frac{A\,x_0+B\,y_0+C\,z_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=\left|\frac{\left(\vec{A},\vec{r}_0\right)+D}{\left|\vec{A}\right|}\right|,$$

где $\vec{r}_0$ - радиус-вектор точки M. Аналогично может быть найдено расстояние от точки $M(x_0,y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ на плоскости. Но в этом случае в соотношение для искомого расстояния $D=0$ и $z_0=1$.

Замечание 7

Иногда δ называют отклонением точки от прямой или плоскости. Отклонение положительно, если начало координат и точка $M(x_0,y_0)$ лежат по разные стороны от прямой (плоскости). Отклонение отрицательно, если начало координат и точка $M(x_0,y_0)$ лежат по одну сторону от прямой (плоскости).

Пример 17

Найдём расстояние от точки $M(3,2,1)$ до плоскости $x+2y+3z+4=0$. Для нахождения данного расстояния воспользуемся соответствующим соотношением. Подстановка соответствующих параметров позволяет получить

$$\delta=\frac{1\cdot 3+2\cdot 2+3\cdot 1+4}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}\approx 3{,}74\,.$$

4) Определим условия, при которых заданная плоскость пересекает заданный отрезок M_1M_2. Запишем уравнение плоскости в общем виде: $Ax+By+Cz+D=0$ и находим отклонения точек $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ от рассматриваемой плоскости. Подстановка координат точек в соответствующее соотношение для искомого расстояния позволяет получить

$$\delta_1=\frac{A\,x_1+B\,y_1+C\,z_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \delta_2=\frac{A\,x_2+B\,y_2+C\,z_2+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,.$$

Для того, чтобы рассматриваемая плоскость пересекала отрезок M_1M_2, необходимо и достаточно, чтобы точки M_1 и M_2 лежали по разные стороны от плоскости, т.е. необходимо и достаточно, чтобы отклонения δ_1 и δ_2 имели разные знаки.

Пример 18

Рассмотрим точки $M_1(3,2,1)$, $M_2(-4,5,-6)$ и $M_3(4,5,6)$ и плоскость $x+2y+3z+4=0$. Далее с помощью стандартного соотношения найдём расстояния от данных точек до прямой. Искомые расстояния соответственно равны $\delta_1\approx 3{,}74$; $\delta_2\approx -2{,}14$; $\delta_3\approx 9{,}35$. Таким образом, плоскость $x+2y+3z+4=0$ пересекает отрезок M_1M_2 и не пересекает отрезок M_1M_3.

5) Пусть прямая задана каноническим уравнением $(x-x_0)/l=(y-y_0)/m=(z-z_0)/n$, а точка M, не лежащая на данной прямой, имеет координаты x_1, y_1, z_1. Найдём уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую и заданную точку. Будем искать уравнение плоскости в следующей форме: $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$. Используя условие принадлежности данной прямой к искомой плоскости получаем следующую систему соотношений

$$\begin{cases} A\left(x_0-x_1\right)+B\left(y_0-y_1\right)+C\left(z_0-z_1\right)=0 \\ A\,l+B\,m+C\,n=0 \end{cases}$$

Точка $M(x_1,y_1,z_1)$ по условию не лежит на данной прямой. Это означает, что нарушается хотя бы одна из пропорций $(x_0-x_1)/l=(y_0-y_1)/m=(z_0-z_1)/n$. По этой причине из последней системы два из коэффициентов A, B и C можно определить через третий (т.к. имеем систему из двух уравнений с тремя неизвестными). Выбрав произвольным, например, третий коэффициент, можно получить уравнение искомой плоскости.

Пример 19

Рассмотрим точку M с координатами x_1=4, y_1=5, z_1=6 и прямую $(x-1)/2=(y+4)/3=(z-7)/5$. Используя условие принадлежности данной прямой к искомой плоскости получаем следующую систему соотношений

$$\begin{cases} A(1-4)+B(-4-5)+C(7-6)=0 \\ 2A+3B+5C=0 \end{cases}$$

Приведение подобных в первом уравнении позволяет записать его в более простом виде

$$\begin{cases} 3A+9B-C=0 \\ 2A+3B+5C=0 \end{cases}.$$

Далее два из коэффициентов A, B и C определим через третий. Выберем произвольным коэффициент C. Тогда получаем соотношения для остальных коэффициентов в следующем виде

$$\begin{cases} A=-16C/3 \\ B=-17C/9 \end{cases}.$$

Далее подставим значения данных коэффициентов в искомое уравнение плоскости. Тогда

$$A(x-4)+B(y-5)+C(z-6)=0 \Leftrightarrow -16C(x-4)/3-17C(y-5)/3+C(z-6)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16(x-4)+17(y-5)-3(z-6)=0.$$

Таким образом, уравнение искомой плоскости может быть записано в следующей форме $16(x-4)+17(y-5)-3(z-6)=0$.

6. Найдём уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую и параллельную другой заданной прямой, не параллельной первой. Пусть $Ax+By+Cz+D=0$ - уравнение искомой плоскости, а уравнения $(x-x_1)/l_1=(y-y_1)/m_1=(z-z_1)/n_1$ и $(x-x_2)/l_2=(y-y_2)/m_1=(z-z_2)/n_2$ описывают указанные прямые. Используя условия принадлежности первой прямой к искомой плоскости и дополнив их условием параллельности искомой плоскости и второй из рассмотренных прямых, получаем систему из трёх уравнений

$$\begin{cases} A x_1 + B y_1 + C z_1 + D = 0 \\ A l_1 + B m_1 + C n_1 = 0 \\ A l_2 + B m_2 + C n_2 = 0 \end{cases}$$

для четырёх неизвестных коэффициентов A, B, C и D. Из-за того, что две данные прямые не параллельны и нарушается хотя бы одна из пропорций $l_1/l_2=m_1/m_2=n_1/n_2$ три из неизвестных коэффициентов могут быть выражены через четвёртый.

Пример 20

Рассмотрим прямые $(x-1)/2=(y+4)/3=(z-7)/5$ и $x=(y-3)/4=(z+1)/3$. Далее запишем систему из трёх уравнений для четырёх неизвестных коэффициентов A, B, C и D

$$\begin{cases} A-4B+7C+D=0 \\ 2A+3B+5C=0 \\ A+4B+3C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A-4B+7C=-D \\ 2A+3B+5C=0 \\ A+4B+3C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A-4B+7C=-D \\ 2A+3B+5C=0 \\ A+4B+3C=0 \end{cases}$$

Решение такой системы имеет вид $A=0$, $B=D/47$и $C=-5D/47$. Подстановка полученных значений коэффициентов A, B и C в общее уравнение плоскости позволяет получить: $y-5z+47=0$.

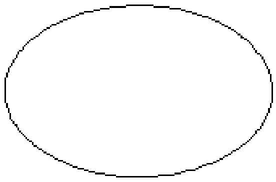
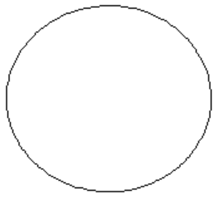
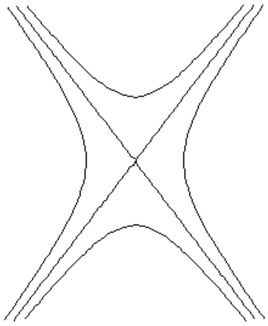
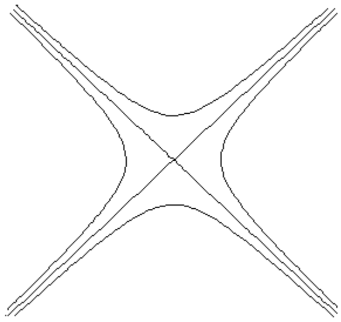
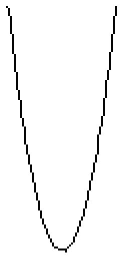
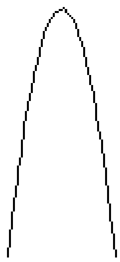
Раздел 4. *Кривые второго порядка*

Определение 13

Рассмотрим следующее уравнение

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Линия, описываемая данным уравнением, называется кривой второго порядка. В качестве основных кривых второго порядка можно выделить следующие

Название кривой	Каноническое уравнение	Вид кривой	
эллипс	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	 для $a/b=\sqrt{2}$	 $a/b=1$
гипербола	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	 Неравнобедренная (неравносторонняя) гипербола ($a/b=\sqrt{2}$)	 Равнобедренная (равносторонняя) гипербола ($a/b=1$)
парабола	$y^2=2px$	 Восходящая парабола	 Нисходящая парабола

При анализе данных кривых часто представляет интерес приведение уравнений кривых второго порядка общего вида к канонической форме или его восстановление по его известным параметрам. Далее рассмотрим несколько таких примеров.

Пример 21

Найдём каноническое уравнение эллипса, если

1) расстояние между фокусами $2c$ равно 8, а длина его малой полуоси b равна 3 (здесь и далее будем считать, что большая полуось совпадает с осью абсцисс, малая полуось совпадает с осью ординат, фокусы расположены на оси абсцисс);
2) длина большой полуоси a равна 6, а эксцентриситет ε равен 0,5;

3) эллипс проходит через точки $M_1\left(2;\sqrt{3}\right)$ и $M_2(0;2)$.

Для нахождения длины большой полуоси a в первой части задачи воспользуемся соотношением $c=\sqrt{a^2-b^2}$, связывающим расстояние от начала координат до одного из фокусов эллипса с длинами его полуосей. Из данного соотношения следует, что $a=\sqrt{c^2+b^2}=\sqrt{16+9}=5$. Тогда каноническое уравнение эллипса принимает вид

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Длина большой полуоси во второй части данного примера может быть вычислена с использованием определения эксцентриситета $\varepsilon=c/a$. Тогда $c=a\cdot\varepsilon=3$. Соотношение $c=\sqrt{a^2-b^2}$ позволяет получить: $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{27}\approx 5{,}20$. В окончательной форме каноническое уравнение эллипса представимо в следующей форме

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$$

Каноническое уравнение эллипса, проходящее через две заданные точки, может быть определено путём подстановки координат данных точек в каноническое уравнение кривой, что приводит к следующей системе уравнений для длин полуосей

$$\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{3}{b^2}=1\\ \dfrac{4}{b^2}=1\end{cases} \text{ или } \begin{cases}a^2=\dfrac{4b^2}{\left(b^2-3\right)}.\\ b^2=4\end{cases}$$

Тогда b=2, a=4 и

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1.$$

<u>Пример 22</u>

Найдём каноническое уравнение гиперболы при следующих условиях:

1) расстояние между фокусами $2c$=10, а между вершинами $2a$=8;
2) длина действительной полуоси a равна $2\sqrt{5}$, а эксцентриситет гиперболы ε равен $\sqrt{1{,}2}$;
3) гипербола проходит через точку $M\left(6;-2\sqrt{2}\right)$, а длина мнимой полуоси равна b =2.

Найдём также углы между асимптотами гиперболы для каждого из рассмотренных случаев. Для этого сначала определим расстояние между фокусами, вещественная a и мнимая b полуоси связаны соотношением $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Тогда

$b^2=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{25-16}=3$, что приводит к каноническому уравнению гиперболы в следующей форме

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{3}=1.$$

Уравнения асимптот данной гиперболы могут быть определены с помощью следующего соотношения, т.е. $y=\pm bx/a$. Угол между асимптотами для первой части данного примера также определяется с помощью стандартного соотношения для угла между прямыми: $tg(\alpha)=\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\dfrac{2b/a}{1-b^2/a^2}\approx 1{,}066$, где k_i - угловые коэффициенты асимптот. Такому значению тангенса соответствует угол в $46{,}83^\circ$.

Далее найдем каноническое уравнение гиперболы. Для этого во второй части данного примера воспользуемся определением эксцентриситета гиперболы, т.е. $\varepsilon=c/a$. Тогда $c=a\cdot\varepsilon=2\sqrt{6}$. Из соотношения $c=\sqrt{a^2+b^2}$ можно получить $b^2=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{24-20}=4$. Таким образом, каноническое уравнение гиперболы для второй части данного примера имеет вид

$$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{4}=1.$$

Уравнения асимптот такой гиперболы определяются соотношением: $y=\pm\sqrt{5}x$. Тангенс угла между асимптотами для первой части данного примера равен $tg(\alpha)=\sqrt{5}/2\approx 1{,}12$, что соответствует углу в $48{,}19^\circ$.

В третьей части данного примера в каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Подставим значения координат точки M и длины мнимой полуоси b, что приводит к следующему результату

$$\frac{36}{a^2}-\frac{8}{4}=1.$$

Тогда a^2=12. В окончательной форме уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1.$$

Асимптоты данной гиперболы описываются следующим уравнением: $y=\pm x/\sqrt{3}$. Тангенс угла между этими прямыми и угол соответственно равны $tg(\alpha)=\sqrt{3}\approx 1{,}73$ и 60°.

Пример 23

Найдём каноническое уравнение параболы при следующих условиях:

1) линия проходит через точки $M_1(0,0)$, $M_2(1,-3)$ и симметрична относительно

оси Ox или Oy;

2) точки, расположенные на гиперболе, одинаково удалены от её фокуса $F(0,2)$ и прямой y=4.

Для нахождения канонического уравнения параболы, симметричной относительно оси Ox, в первой части данного примера подставим в искомое уравнение $y^2=2p_1x$ с неизвестным пока фокальным параметром p_1 координаты точки M_2, что приводит к следующему результату

$$(-3)^2=2p_1 \Rightarrow p_1=4{,}5.$$

Аналогично находим значение фокального параметра и для параболы, симметричной относительно оси Oy. В данном случае каноническое уравнение параболы имеет вид: $x^2=2p_2y$. Тогда

$$1^2=(-3)p_2 \Rightarrow p_2=-1/3.$$

С учётом вычисленных значений фокальных параметров искомые канонические уравнения парабол, симметричных относительно осей Ox и Oy, могут быть представлены соответственно в следующих формах

$$y^2=9x \text{ и } x^2=-y/3.$$

Во второй части данного примера фокус имеет координаты $F(0,2)$, а уравнение директрисы $y=4$. С другой стороны вершина параболы находится на одинаковом расстоянии от фокуса и директрисы. По этой причине вершина параболы расположена на расстоянии $y_0=(4+2)/2=3$ от начала координат. Тогда каноническое уравнение параболы представимо в форме $y=a\,x^2+3$. Фокальный параметр a найдём из определения гиперболы. Согласно определению параболы расстояние от любой точки кривой до фокуса и директрисы должно быть одинаковым. Знак параметра a пока неизвестен, т.е. он может быть или положительным, или отрицательным. На первом этапе рассмотрим случай $a<0$. Для упрощения расчёта параметра a выберем пару точек на оси абсцисс $M_1(x_0,0)$ и $M_2(-x_0,0)$, симметричную относительно начала координат, и будем рассматривать эти точки как точки пересечения ветвей параболы с осью ординат. Далее рассмотрим два расстояния: от точки $M_1(x_0,0)$ до фокуса $F(0,2)$ и от точки $M_1(x_0,0)$ до директрисы $y=4$ (т.е. до точки $(x_0,4)$). Данные расстояния могут быть определены с помощью соотношения $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, где (x_1,y_1) и (x_2,y_2) - координаты точек, между которыми определяется расстояние. Подстановка координат точек $(x_0,0)$, $F(0,2)$ и $(x_0,4)$ в данное соотношение с учётом равенства расстояний между соответствующими парами точек позволяет получить: $\sqrt{(x_0-0)^2+(2-0)^2}=$ $=\sqrt{(x_0-x_0)^2+(4-0)^2}$. Тогда $x_0=\sqrt{12}$. С учётом значений координат точки M_1 из уравнения параболы получаем уравнение для искомого фокального параметра: $0=12a+3$. Из данного уравнения следует, что $a=-1/4$. В окончательной форме каноническое уравнение параболы принимает вид

$$y^2=3-x^2/4.$$

Преобразование уравнений кривых второго порядка к каноническому виду

Целью преобразования уравнений кривых второго порядка к каноническому виду является переход к такой системе координат, в которой уравнение кривой второго порядка $A x^2+Bx y+Cy^2+D x+E y+F=0$ максимально бы упростилось. Используются два вида преобразования

1) параллельный перенос системы координат. В данном случае вместо старых координат x, y и z используются новые x', y' и z'. Прямое преобразование параллельного переноса декартовых координат определяется следующими соотношениями:

$$x = x'+a\,;\ y = y'+b\,,$$

где a и b – координаты нового начала в старых координатах. Обратное преобразование имеет вид

$$x' = x-a\,;\ y' = y-b\,,$$

2) поворот осей системы координат на угол φ. Прямое и обратное преобразования координат в таком случае могут быть представлены в следующей форме

$$x = x'\cos(\varphi)-y'\sin(\varphi),\ y = x'\sin(\varphi)-y'\cos(\varphi);$$

$$x' = x\cos(\varphi)+y\sin(\varphi),\ y' = -x\sin(\varphi)+y\cos(\varphi).$$

Далее рассмотрим пример преобразования уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

<u>Пример 24</u>

Приведём к каноническому виду уравнение

$$17x^2+12xy+8y^2-46x-28y+17=0.$$

На первом этапе сделаем преобразование параллельного переноса. Перенесём начало координат в точку $S(a,b)$, координаты которой будем пока считать произвольной. Тогда получаем следующее преобразование координат

$$x = x'+a\,;\ y = y'+b\,.$$

Подстановка такого преобразования в левую часть анализируемого уравнения линии второго порядка и незначительные арифметические преобразования позволяют получить

$$17x^2+12x\,y+8y^2-46x-28y+17=0 \Leftrightarrow 17(x'+a)^2+12(x'+a)(y'+b)+8(y'+b)^2-$$
$$-46(x'+a)-28(y'+b)+17=0 \Leftrightarrow 17\left(x'^2+2x'a+a^2\right)+12(x'y'+a\,y'+b\,x'+a\,b)+17+$$
$$+8\left(y'^2+2y'b+b^2\right)-46(x'+a)-28(y'+b)=0 \Leftrightarrow 17x'^2+12x'y'+8y'^2+x'(34a+$$
$$+12b-46)+y'(12a+16b-28)+17a^2+12ab+8b^2-46a-28b+17=0\,.$$

Координаты a и b подбираем таким образом, чтобы обратились в нуль линейные по x и y члены. Тогда должны выполняться условия

$$34a+12b-46=0,\ 12a+16b-28=0.$$

Решением такой системы уравнений являются следующие значения координат a и b: a=b=1. Свободный член определяется после преобразования соотношением

$$F'=17a^2+12ab+8b-46a-28b+17=-20.$$

После такого параллельного переноса уравнение рассматриваемой кривой второго порядка имеет вид

$$17x'^2+12x'y'+8y'^2-20=0.$$

Далее произведём поворот перенесённых осей на некоторый угол φ. Подстановка прямого преобразования поворота в модифицированное параллельным переносом уравнение рассматриваемой кривой и последовательные преобразования позволяют получить

$$17x'^2+12x'y'+8y'^2-20=0 \Leftrightarrow 17\left[x''\cos(\varphi)-y''\sin(\varphi)\right]^2+12\left[x''\cos(\varphi)-y''\sin(\varphi)\right]\times$$

$$\times\left[x''\sin(\varphi)-y''\cos(\varphi)\right]+8\left[x''\sin(\varphi)-y''\cos(\varphi)\right]^2-20=0 \Leftrightarrow 17\left[x''^2\cos^2(\varphi)-2x''y''\times\right.$$

$$\left.\times\sin(\varphi)\cos(\varphi)+y''^2\sin^2(\varphi)\right]+12\left[x''^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)-x''y''+y''^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\right]-20+$$

$$+8\left[x''^2\sin^2(\varphi)-2x''y''\sin(\varphi)\cos(\varphi)+y''^2\cos^2(\varphi)\right]=0 \Leftrightarrow x''^2\left[12\sin(\varphi)\cos(\varphi)+8+\right.$$

$$\left.+9\cos^2(\varphi)\right]-x''y''\left[50\sin(\varphi)\cos(\varphi)-12\right]+y''^2\left[9\sin^2(\varphi)+12\sin(\varphi)\cos(\varphi)+8\right]-20=0.$$

Далее выберем угол φ так, чтобы коэффициент при $x''y''$ обратился в нуль. Для определения такого значения угла решим следующее уравнение

$$50sin(\varphi)cos(\varphi)+12=0.$$

Данное уравнение преобразуем к следующему виду

$$sin(2\varphi)=-12/25.$$

Данное уравнение имеет следующее решение: φ_0=-$arcsin$(12/25)+$2\pi n$ ≈-28,69°+ $2\pi n$, где n - целое число. В окончательной форме (с учётом параллельного переноса системы координат в точку S(1,1), поворота системы координат на угол φ_0=-$arcsin$(12/25) и незначительных тригонометрических преобразований) получаем, что искомое каноническое уравнение (в данном случае - эллипса) имеет вид

$$\frac{x''^2}{1000}\left(769+\sqrt{481}\right)+\frac{y''^2}{1000}\left(769-\sqrt{481}\right)=1.$$

Полярное уравнение эллипса, гипербола и параболы

От рассмотренных ранее уравнений в декартовых координат x и y перейдём далее к полярным координатам x=$rcos$(φ) и y=$rsin$(φ). Может быть показано, что уравнение эллипса, параболы и одной из ветвей гиперболы может быть представлено в следующем виде:

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos(\varphi)},$$

где p - фокальный параметр (для эллипса и гиперболы $p=b^2/a$), ε - эксцентреситет.

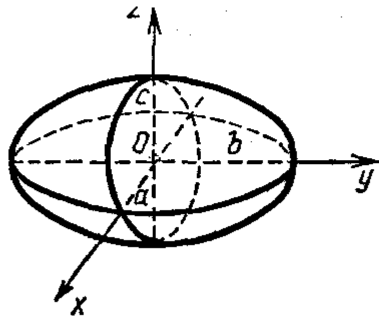
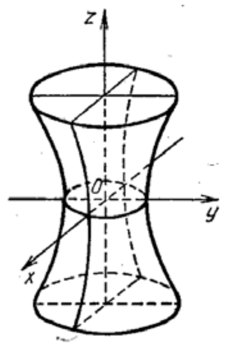
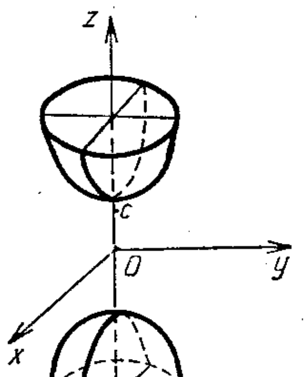
Раздел 5. *Поверхности второго порядка*

<u>Определение 25</u>

Рассмотрим следующее уравнение

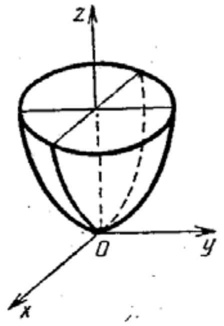
$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dxz+Ez^2+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0.$$

Поверхность, описываемая таким уравнением, называется поверхностью второго порядка. В качестве основных поверхностей второго порядка можно выделить следующие

Каноническое уравнение поверхности	Название поверхности	Вид поверхности
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Эллипсоид	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	Однополостный гиперболоид	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	Двухполостный гиперболоид	

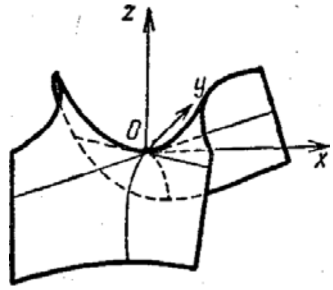
$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q},$$

Эллиптический параболоид



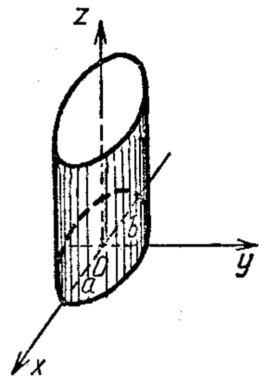
$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$$

Гиперболический параболоид



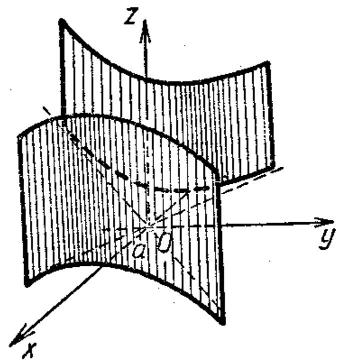
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Эллиптический цилиндр



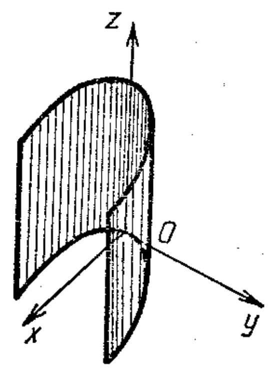
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Гиперболический цилиндр



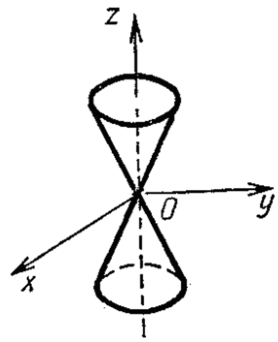
$y^2 = 2px$

Параболический цилиндр



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Конус



Приведение уравнений поверхностей второго порядка к каноническому виду и восстановление канонического уравнения по известным параметрам проводится аналогично, как и в случае кривых второго порядка. Однако построение поверхностей второго порядка является более трудоёмким, чем построение плоских кривых. Далее рассмотрим пример такого построения.

<u>Пример 25</u>

Рассмотрим эллиптический параболоид. Такая поверхность в декартовой системе координат определяется следующим уравнением (при положительных значениях p и q)

$$2z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}.$$

Построим данную поверхность методом сечений. На первом этапе рассмотрим сечения эллиптического параболоида плоскостью $y=h$. Такое сечение определяется уравнениями

$$\begin{cases} 2z=\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{h^2}{q} \\ y=h \end{cases}$$

Из данного соотношения следует, что сечение представляет собой восходящую параболу, расположенную симметрично относительно оси Оz с вершиной в точке $M_1(0,h^2/2q)$. Параметр этой параболы равен $1/2p$. Сечение плоскостью $x=h$ определяется уравнениями

$$\begin{cases} 2z=\dfrac{h^2}{p}+\dfrac{y^2}{q} \\ x=h \end{cases}$$

Таким образом, сечение представляет собой восходящую параболу, расположенную симметрично относительно оси Оz с вершиной в точке $M_1(0,h^2/2p)$. Параметр этой параболы равен $1/2q$. Сечение плоскостью $z=h$ определяется следующей системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2h \\ z=h \end{cases}$$

Из данной системы следует, что

1) при $h>0$ рассматриваемая секущая плоскость эллиптического параболоида является эллипсом с полуосями $a^* = \sqrt{2hp}$ и $b^* = \sqrt{2hq}$, расположенным симметрично относительно плоскостей Oxz и Oyz;
2) величины a^* и b^* имеют наименьшие значения при $h=0$ (тогда $a^*=0$, $b^*=0$, эллипс вырождается в точку);
3) при бесконечном возрастании $|h|$ величины a^* и b^* бесконечно возрастают, а при отрицательном h сечение определяется мнимым эллипсом.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

I) Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти угол между этими векторами и площадь параллелограмма, построенного на них, если

1.01*a* $\vec{a} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$;

1.01*b* $\vec{a} = 2\vec{c} + 3\vec{d}$, $\vec{b} = 2\vec{c} - 3\vec{d}$, $|\vec{c}| = 2$, $|\vec{d}| = 2$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 60^\circ$;

1.02*a* $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$;

1.02*b* $\vec{a} = 2\vec{c} + \vec{d}$, $\vec{b} = \vec{c} + 4\vec{d}$, $|\vec{c}| = 2$, $|\vec{d}| = 1$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 60^\circ$;

1.03*a* $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$;

1.03*b* $\vec{a} = 3\vec{c} - 7\vec{d}$, $\vec{b} = 8\vec{c} + 11\vec{d}$, $|\vec{c}| = 3$, $|\vec{d}| = 4$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 60^\circ$;

1.04*a* $\vec{a} = -3\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$;

1.04*b* $\vec{a} = 2\vec{c} + \vec{d}$, $\vec{b} = 7\vec{c} + 4\vec{d}$, $|\vec{c}| = 3$, $|\vec{d}| = 3$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 60^\circ$;

1.05*a* $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$;

1.05*b* $\vec{a} = 6\vec{c} + 5\vec{d}$, $\vec{b} = 3\vec{d} - 2\vec{c}$, $|\vec{c}| = 6$, $|\vec{d}| = 2$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 60^\circ$;

1.06*a* $\vec{a} = 8\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$;

1.06*b* $\vec{a} = 7\vec{c} - \vec{d}$, $\vec{b} = \vec{c} + 11\vec{d}$, $|\vec{c}| = 1$, $|\vec{d}| = 4$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 45^\circ$;

1.07*a* $\vec{a} = 3\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$;

1.07*b* $\vec{a} = 5\vec{c} + 8\vec{d}$, $\vec{b} = 3\vec{c} + 2\vec{d}$, $|\vec{c}| = 2$, $|\vec{d}| = 8$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 45^\circ$;

1.08*a* $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = -7\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$;

1.08*b* $\vec{a} = 9\vec{c} + 12\vec{d}$, $\vec{b} = \vec{c} + 7\vec{d}$, $|\vec{c}| = 4$, $|\vec{d}| = 6$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 45^\circ$;

1.09*a* $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + 0{,}25\vec{k}$;

1.09*b* $\vec{a} = 7\vec{c} + 11\vec{d}$, $\vec{b} = 8\vec{c} + 2\vec{d}$, $|\vec{c}| = 2$,

$\left|\vec{d}\right| = 5$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d} = 45^\circ$;

1.10*a* $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 21\vec{i} + 7\vec{j} + 8\vec{k}$;

1.10*b* $\vec{a} = 4\vec{c} + \vec{d}$, $\vec{b} = 7\vec{c} + 3\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 1$, $\left|\vec{d}\right| = 3$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d} = 45^\circ$;

1.11*a* $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} + 9\vec{j} + 11\vec{k}$;

1.11*b* $\vec{a} = -6\vec{c} + 4\vec{d}$, $\vec{b} = 7\vec{c} + 11\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 2$, $\left|\vec{d}\right| = 4$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d} = 30^\circ$;

1.12*a* $\vec{a} = 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;

1.12*b* $\vec{a} = 4\vec{c} + 12\vec{d}$, $\vec{b} = 5\vec{c} + 8\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 13$, $\left|\vec{d}\right| = 16$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d} = 30^\circ$;

1.13*a* $\vec{a} = 3\vec{i} + 9\vec{j} + 81\vec{k}$, $\vec{b} = 11\vec{j} + 9\vec{k}$;

1.13*b* $\vec{a} = 2\vec{c} + 8\vec{d}$, $\vec{b} = 9\vec{c} + 23\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 9$, $\left|\vec{d}\right| = 9$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d} = 30^\circ$;

1.14*a* $\vec{a} = 2\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 8\vec{i} + 9\vec{j} + 2\vec{k}$;

1.14*b* $\vec{a} = 8\vec{c} + 19\vec{d}$, $\vec{b} = 2\vec{c} + 3\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 3$, $\left|\vec{d}\right| = 2$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d} = 30^\circ$;

1.15*a* $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;

1.15*b* $\vec{a} = 5\vec{c} + 2\vec{d}$, $\vec{b} = \vec{c} + 4\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 1$, $\left|\vec{d}\right| = 5$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d} = 30^\circ$;

1.16*a* $\vec{a} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$;

1.16*b* $\vec{a} = 3\vec{c} + \vec{d}$, $\vec{b} = 4\vec{c} + 2\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 2$, $\left|\vec{d}\right| = 2$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d} = 90^\circ$;

1.17*a* $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$;

1.17*b* $\vec{a} = 7\vec{c} + 4\vec{d}$, $\vec{b} = 9\vec{c} + 33\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 1$, $\left|\vec{d}\right| = 1$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d} = 90^\circ$;

1.18*a* $\vec{a} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;

1.18*b* $\vec{a} = 11\vec{c} + 3\vec{d}$, $\vec{b} = 27\vec{c} + 5\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 3$, $\left|\vec{d}\right| = 2$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d} = 90^\circ$;

1.19*a* $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$;

1.19*b* $\vec{a} = 3\vec{c} + 9\vec{d}$, $\vec{b} = 2\vec{c} + 8\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 6$, $\left|\vec{d}\right| = 5$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d} = 90^\circ$;

1.20*a* $\vec{a} = -3\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$;

1.20*b* $\vec{a} = 7\vec{c} + 2\vec{d}$, $\vec{b} = \vec{c} + 3\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 4$, $\left|\vec{d}\right| = 3$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d} = 90^\circ$;

01.21*a* $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$;

01.21*b* $\vec{a} = 3\vec{c} + 6\vec{d}$, $\vec{b} = 9\vec{c} + 12\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 2$,

$\left|\vec{d}\right|=1$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d}=120°$;

1.22a $\vec{a}=6\vec{i}+8\vec{j}+8\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+5\vec{j}+6\vec{k}$; 1.22b $\vec{a}=7\vec{c}+2\vec{d}$, $\vec{b}=8\vec{c}+4\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right|=9$, $\left|\vec{d}\right|=11$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d}=120°$;

1.23a $\vec{a}=3\vec{i}+8\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=-7\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}$; 1.23b $\vec{a}=\vec{c}+5\vec{d}$, $\vec{b}=5\vec{c}+3\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right|=2$, $\left|\vec{d}\right|=7$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d}=120°$;

1.24a $\vec{a}=3\vec{i}+8\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=-7\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}$; 1.24b $\vec{a}=2\vec{d}$, $\vec{b}=2\vec{c}+6\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right|=3$, $\left|\vec{d}\right|=6$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d}=120°$;

1.25a $\vec{a}=4\vec{i}+6\vec{j}+9\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 1.25b $\vec{a}=\vec{c}+3\vec{d}$, $\vec{b}=4\vec{c}+9\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right|=9$, $\left|\vec{d}\right|=12$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d}=120°$;

1.26a $\vec{a}=4\vec{i}+6\vec{j}+9\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 1.26b $\vec{a}=2\vec{c}+\vec{d}$, $\vec{b}=3\vec{c}+8\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right|=4$, $\left|\vec{d}\right|=4$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d}=135°$;

1.27a $\vec{a}=3\vec{i}+9\vec{j}+81\vec{k}$, $\vec{b}=8\vec{i}+9\vec{j}+2\vec{k}$; 1.27b $\vec{a}=3\vec{c}+8\vec{d}$, $\vec{b}=3\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right|=5$, $\left|\vec{d}\right|=1$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d}=135°$;

1.28a $\vec{a}=3\vec{i}+9\vec{j}+81\vec{k}$, $\vec{b}=8\vec{i}+9\vec{j}+2\vec{k}$; 1.28b $\vec{a}=4\vec{c}+7\vec{d}$, $\vec{b}=6\vec{c}+4\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right|=3$, $\left|\vec{d}\right|=7$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d}=135°$;

1.29a $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{b}=7\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$; 1.29b $\vec{a}=5\vec{c}+2\vec{d}$, $\vec{b}=3\vec{c}+11\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right|=2$, $\left|\vec{d}\right|=5$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d}=135°$;

1.30a $\vec{a}=3\vec{i}+8\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 1.30b $\vec{a}=6\vec{c}$, $\vec{b}=4\vec{c}+3\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right|=1$, $\left|\vec{d}\right|=1$, $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d}=135°$.

II) Найти объёмы параллелепипеда $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ и пирамиды $A_1B_1C_1D_2$, если

2.01 $A_1(3,2,1)$, $B_1(6,8,4)$, $C_1(5,7,2)$, $D_2(4,3,-8)$;

2.02 $A_1(5,4,3)$, $B_1(0,-2,1)$, $C_1(5,6,1)$, $D_2(3,4,5)$;

2.03 $A_1(6,8,5)$, $B_1(4,3,0)$, $C_1(2,1,7)$, $D_2(3,7,-4)$;

2.04 $A_1(2,1,1)$, $B_1(3,0,0)$, $C_1(4,1,5)$, $D_2(6,2,4)$;

2.05 $A_1(2,5,3)$, $B_1(4,2,2)$, $C_1(5,5,5)$, $D_2(3,6,2)$;

2.06 $A_1(6,5,-4)$, $B_1(1,-3,6)$, $C_1(-2,-4,-6)$, $D_2(0,3,5)$;

2.07 $A_1(1,8,6)$,$B_1(2,5,4)$, $C_1(0,8,3)$, $D_2(7,2,1)$;

2.08 $A_1(0,0,1)$,$B_1(7,2,0)$, $C_1(0,2,-11)$, $D_2(5,8,7)$;

2.09 $A_1(5,3,4)$, $B_1(2,7,7)$, $C_1(5,1,1)$, $D_2(0,8,7)$;

2.10 $A_1(6,2,4)$, $B_1(8,5,7)$, $C_1(3,1,2)$, $D_2(5,4,8)$;

2.11 $A_1(0,3,3)$, $B_1(5,8,7)$, $C_1(4,3,1)$, $D_2(8,8,6)$;

2.12 $A_1(5,4,2)$, $B_1(0,8,-3)$, $C_1(-3,6,5)$, $D_2(2,2,2)$;

2.13 $A_1(7,4,5)$, $B_1(-3,5,1)$, $C_1(2,1,1)$, $D_2(4,3,2)$;

2.14 $A_1(5,4,2)$, $B_1(2,7,5)$, $C_1(2,7,8)$, $D_2(4,5,1)$;

2.15 $A_1(8,7,4)$, $B_1(5,3,2)$, $C_1(4,3,2)$, $D_2(5,8,7)$;

2.16 $A_1(3,8,3)$, $B_1(5,1,1)$, $C_1(2,1,4)$, $D_2(7,8,9)$;

2.17 $A_1(9,5,7)$, $B_1(8,9,4)$, $C_1(5,7,8)$, $D_2(4,3,-1)$;

2.18 $A_1(1,2,1)$, $B_1(3,7,5)$, $C_1(2,1,1)$, $D_2(5,4,0)$;

2.19 $A_1(19,0,1)$, $B_1(4,3,1)$, $C_1(2,1,1)$, $D_2(3,6,9)$;

2.20 $A_1(1,7,8)$, $B_1(7,1,1)$, $C_1(0,8,5)$, $D_2(4,3,1)$;

2.21 $A_1(2,3,7)$, $B_1(9,5,4)$, $C_1(8,6,4)$, $D_2(2,3,1)$;

2.22 $A_1(4,3,1)$, $B_1(8,6,4)$, $C_1(4,5,6)$, $D_2(2,5,-1)$;

2.23 $A_1(3,6,4)$, $B_1(2,1,3)$, $C_1(9,7,2)$, $D_2(4,3,2)$;

2.24 $A_1(6,9,4)$, $B_1(-6,2,2)$, $C_1(0,7,4)$, $D_2(9,3,2)$;

2.25 $A_1(6,9,2)$, $B_1(5,3,1)$, $C_1(3,2,9)$, $D_2(5,7,3)$;

2.26 $A_1(5,8,1)$,$B_1(3,4,1)$,$C_1(2,1,8)$, $D_2(4,3,11)$;

2.27 $A_1(3,8,1)$, $B_1(4,9,11)$, $C_1(2,3,5)$, $D_2(1,3,1)$;

2.28 $A_1(6,9,4)$, $B_1(5,3,0)$, $C_1(8,3,4)$, $D_2(3,8,1)$;

2.29 $A_1(5,9,0)$, $B_1(6,2,1)$, $C_1(5,4,3)$, $D_2(7,9,0)$;

2.30 $A_1(2,4,6)$, $B_1(3,7,7)$, $C_1(2,7,8)$, $D_2(5,1,3)$.

III) Дан треугольник ABC, его вершины $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ и $C(x_C,y_C)$. Определить: (i) уравнение прямых AC, BC, AB; (ii) внутренние углы треугольника; (iii) уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно стороне AC; (iv) уравнения высоты и медианы, проведённых из точки B; (v) координаты точки B', симметричной точке B, относительно прямой AC; (vi) расстояние от точки B до прямой AC.

3.01 $A(1,2)$, $B(5,4)$, $C(5,6)$;	3.02 $A(4,3)$, $B(1,8)$, $C(3,2)$;
3.03 $A(6,4)$, $B(3,8)$, $C(3,5)$;	3.04 $A(8,2)$, $B(1,3)$, $C(5,7)$;
3.05 $A(4,2)$, $B(6,5)$, $C(2,3)$;	3.06 $A(2,3)$, $B(1,5)$, $C(8,6)$;
3.07 $A(7,7)$, $B(2,1)$, $C(4,0)$;	3.08 $A(3,5)$, $B(7,2)$, $C(4,2)$;
3.09 $A(3,1)$, $B(3,5)$, $C(4,0)$;	3.10 $A(4,6)$, $B(2,3)$, $C(7,8)$;
3.11 $A(6,5)$, $B(3,4)$, $C(4,1)$;	3.12 $A(0,2)$, $B(8,6)$, $C(4,2)$;
3.13 $A(2,9)$, $B(8,5)$, $C(4,2)$;	3.14 $A(3,7)$, $B(9,6)$, $C(5,8)$;
3.15 $A(3,9)$, $B(2,2)$, $C(3,1)$;	3.16 $A(5,5)$, $B(2,3)$, $C(7,4)$;
3.17 $A(8,2)$, $B(2,5)$, $C(4,3)$;	3.18 $A(3,2)$, $B(7,2)$, $C(5,4)$;
3.19 $A(2,3)$, $B(6,8)$, $C(3,4)$;	3.20 $A(0,7)$, $B(9,8)$, $C(6,4)$;
3.21 $A(5,3)$, $B(2,8)$, $C(9,9)$;	3.22 $A(2,4)$, $B(3,8)$, $C(7,5)$;
3.23 $A(6,4)$, $B(2,3)$, $C(5,8)$;	3.24 $A(8,9)$, $B(9,5)$, $C(4,3)$;
3.25 $A(4,3)$, $B(9,5)$, $C(4,3)$;	3.26 $A(2,1)$, $B(7,8)$, $C(3,5)$;
3.27 $A(8,8)$, $B(0,3)$, $C(1,1)$;	3.28 $A(1,7)$, $B(7,5)$, $C(4,3)$;
3.29 $A(5,6)$, $B(4,8)$, $C(9,3)$;	3.30 $A(5,6)$, $B(3,0)$, $C(2,5)$.

IV) Даны две прямые $(x\text{-}x_1)/l_1=(y\text{-}y_1)/m_1=(z\text{-}z_1)/n_1$ и $(x\text{-}x_2)/l_2=(y\text{-}y_2)/m_2=(z\text{-}z_2)/n_2$, плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Определить: (i) угол между двумя прямыми; (ii) угол между первой прямой и плоскостью; (iii) уравнение плоскости, проходящей через первую прямую и точку M_0; (iv) уравнение плоскости, проходящей через первую прямую и параллельную второй прямой, если $l_1=m_1= n_1=1$, $l_2=2$, $m_2=3$, $n_2=4$ и

4.01 $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=3$, $y_0=4$, $y_1=3$, $y_2=2$, $z_0=5$, $z_1=6$, $z_2=4$, $A=3$, $B=6$, $C=2$, $D=1$;

4.02 $x_0=3$, $x_1=6$, $x_2=5$, $y_0=4$, $y_1=8$, $y_2=3$, $z_0=2$, $z_1=1$, $z_2=7$, $A=9$, $B=6$, $C=4$, $D=2$;

4.03 $x_0=8$, $x_1=7$, $x_2=4$, $y_0=2$, $y_1=7$, $y_2=1$, $z_0=3$, $z_1=8$, $z_2=7$, $A=2$, $B=1$, $C=1$, $D=6$;

4.04 $x_0=4$, $x_1=2$, $x_2=1$, $y_0=3$, $y_1=7$, $y_2=9$, $z_0=8$, $z_1=3$, $z_2=8$, $A=5$, $B=0$, $C=3$, $D=2$;

4.05 $x_0=1$, $x_1=6$, $x_2=4$, $y_0=0$, $y_1=2$, $y_2=1$, $z_0=1$, $z_1=2$, $z_2=5$, $A=5$, $B=5$, $C=2$, $D=6$;

4.06 $x_0=9$, $x_1=8$, $x_2=0$, $y_0=1$, $y_1=1$, $y_2=3$, $z_0=2$, $z_1=0$, $z_2=5$, $A=1$, $B=3$, $C=8$, $D=9$;

4.07 $x_0=2$, $x_1=1$, $x_2=6$, $y_0=4$, $y_1=5$, $y_2=8$, $z_0=3$, $z_1=2$, $z_2=2$, $A=1$, $B=0$, $C=7$, $D=9$;

4.08 $x_0=8$, $x_1=6$, $x_2=4$, $y_0=2$, $y_1=0$, $y_2=7$, $z_0=1$, $z_1=3$, $z_2=8$, $A=7$, $B=2$, $C=1$, $D=1$;

4.09 $x_0=0$, $x_1=3$, $x_2=2$, $y_0=8$, $y_1=6$, $y_2=4$, $z_0=3$, $z_1=7$, $z_2=1$, $A=0$, $B=5$, $C=4$, $D=3$;

4.10 $x_0=6$, $x_1=5$, $x_2=4$, $y_0=3$, $y_1=2$, $y_2=1$, $z_0=6$, $z_1=4$, $z_2=5$, $A=2$, $B=7$, $C=0$, $D=1$;

4.11 $x_0=1$, $x_1=7$, $x_2=8$, $y_0=5$, $y_1=2$, $y_2=1$, $z_0=3$, $z_1=2$, $z_2=5$, $A=8$, $B=7$, $C=4$, $D=6$;

4.12 $x_0=2$, $x_1=5$, $x_2=3$, $y_0=2$, $y_1=4$, $y_2=1$, $z_0=3$, $z_1=7$, $z_2=5$, $A=2$, $B=8$, $C=0$, $D=6$;

4.13 $x_0=4$, $x_1=3$, $x_2=2$, $y_0=1$, $y_1=3$, $y_2=2$, $z_0=7$, $z_1=5$, $z_2=9$, $A=4$, $B=8$, $C=3$, $D=2$;

4.14 $x_0=5$, $x_1=9$, $x_2=4$, $y_0=0$, $y_1=3$, $y_2=6$, $z_0=9$, $z_1=3$, $z_2=2$, $A=8$, $B=7$, $C=4$, $D=0$;

4.15 $x_0=5$, $x_1=2$, $x_2=9$, $y_0=0$, $y_1=6$, $y_2=4$, $z_0=2$, $z_1=5$, $z_2=3$, $A=7$, $B=2$, $C=1$, $D=7$;

4.16 $x_0=3$, $x_1=8$, $x_2=6$, $y_0=5$, $y_1=3$, $y_2=2$, $z_0=7$, $z_1=9$, $z_2=5$, $A=4$, $B=6$, $C=2$, $D=3$;

4.17 $x_0=8$, $x_1=9$, $x_2=5$, $y_0=2$, $y_1=4$, $y_2=3$, $z_0=2$, $z_1=2$, $z_2=8$, $A=0$, $B=4$, $C=3$, $D=9$;

4.18 $x_0=5$, $x_1=4$, $x_2=0$, $y_0=3$, $y_1=2$, $y_2=8$, $z_0=9$, $z_1=6$, $z_2=5$, $A=4$, $B=3$, $C=2$, $D=1$;

4.19 $x_0=1$, $x_1=1$, $x_2=0$, $y_0=7$, $y_1=1$, $y_2=5$, $z_0=4$, $z_1=9$, $z_2=5$, $A=7$, $B=1$, $C=8$, $D=3$;

4.20 $x_0=2$, $x_1=4$, $x_2=3$, $y_0=6$, $y_1=9$, $y_2=8$, $z_0=4$, $z_1=5$, $z_2=3$, $A=8$, $B=9$, $C=3$, $D=7$;

4.21 $x_0=6$, $x_1=4$, $x_2=9$, $y_0=8$, $y_1=3$, $y_2=5$, $z_0=2$, $z_1=1$, $z_2=1$, $A=5$, $B=3$, $C=6$, $D=8$;

4.22 $x_0=0$, $x_1=0$, $x_2=6$, $y_0=4$, $y_1=9$, $y_2=5$, $z_0=4$, $z_1=3$, $z_2=9$, $A=5$, $B=4$, $C=6$, $D=3$;

4.23 $x_0=5$, $x_1=8$, $x_2=9$, $y_0=9$, $y_1=3$, $y_2=2$, $z_0=2$, $z_1=1$, $z_2=3$, $A=4$, $B=3$, $C=7$, $D=9$;

4.24 x_0=3, x_1=8, x_2=7, y_0=4, y_1=2, y_2=4, z_0=7, z_1=8, z_2=7, A=2, B=9, C=6, D=8;

4.25 x_0=9, x_1=5, x_2=2, y_0=4, y_1=3, y_2=3, z_0=9, z_1=7, z_2=8, A=9, B=1, C=2, D=6;

4.26 x_0=2, x_1=4, x_2=3, y_0=8, y_1=7, y_2=1, z_0=3, z_1=2, z_2=2, A=6, B=4, C=9, D=2;

4.27 x_0=1, x_1=8, x_2=5, y_0=4, y_1=9, y_2=8, z_0=0, z_1=5, z_2=9, A=1, B=8, C=3, D=3;

4.28 x_0=9, x_1=9, x_2=5, y_0=3, y_1=1, y_2=8, z_0=6, z_1=4, z_2=5, A=2, B=2, C=5, D=6;

4.29 x_0=6, x_1=4, x_2=8, y_0=3, y_1=3, y_2=2, z_0=9, z_1=1, z_2=5, A=9, B=4, C=8, D=3;

4.30 x_0=0, x_1=5, x_2=6, y_0=2, y_1=4, y_2=3, z_0=8, z_1=5, z_2=2, A=2, B=6, C=3, D=4.

V Даны три точки $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ и $M_3(x_3,y_3)$. Найти: (*i*) полуоси a и b, расстояние между фокусами, эксцентриситет эллипса, проходящего через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, а также гиперболы проходящей через точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_3(x_3,y_3)$; (*ii*) каноническое уравнение параболы, если $M_1(x_1,y_1)$ - её фокус, а $y=y_2$ - её директриса; (*iii*) записать канонические уравнения для рассмотренных случаев.

5.01 $M_1(3,1)$, $M_2(1,2)$, $M_3(4,2)$;

5.02 $M_1(4,1)$, $M_2(0,2)$, $M_3(3,0)$;

5.03 $M_1(6,2)$, $M_2(4,3)$, $M_3(5,4)$;

5.04 $M_1(7,1)$, $M_2(5,4)$, $M_3(8,2)$;

5.05 $M_1(4,3)$, $M_2(7,0)$, $M_3(5,1)$;

5.06 $M_1(4,3)$, $M_2(1,2)$, $M_3(2,1)$;

5.07 $M_1(5,3)$, $M_2(7,1)$, $M_3(4,2)$;

5.08 $M_1(5,1)$, $M_2(0,2)$, $M_3(3,2)$;

5.09 $M_1(1/5,2/3)$,$M_2(1,1/3)$, $M_3(1/6,0)$;

5.10 $M_1(2,5)$, $M_2(0,7)$, $M_3(1,2)$;

5.11 $M_1(4,2)$, $M_2(81/2,0)$, $M_3(3,1)$;

5.12 $M_1(6,0)$, $M_2(1,2)$, $M_3(7,1)$;

5.13 $M_1(4,5)$, $M_2(1,2)$, $M_3(3,1)$;

5.14 $M_1(7,1)$, $M_2(5,2)$, $M_3(1,2)$;

5.15 $M_1(2,1)$, $M_2(4,3/4)$, $M_3(7,4)$;

5.16 $M_1(2,7)$, $M_2(3,5)$, $M_3(1,1/3)$;

5.17 $M_1(4,5)$, $M_2(0,6)$, $M_3(3,0)$;

5.18 $M_1(3,1/3)$, $M_2(2,1)$, $M_3(2,1)$;

5.19 $M_1(2,3)$, $M_2(3,0)$, $M_3(1/2,1)$;

5.20 $M_1(1,1/2)$, $M_2(2,0)$, $M_3(2,3)$;

5.21 $M_1(5,0)$, $M_2(4,2)$, $M_3(3,1)$;

5.22 $M_1(5,4)$, $M_2(3,5)$, $M_3(1,1/3)$;

5.23 $M_1(6,4)$, $M_2(5,3)$, $M_3(3,1)$;

5.24 $M_1(6,0)$, $M_2(5,1)$, $M_3(8,3)$;

5.25 $M_1(2,3)$, $M_2(1,6)$, $M_3(4,7)$; 5.26 $M_1(5,1)$, $M_2(3,2)$, $M_3(6,3)$;

5.27 $M_1(5,1)$, $M_2(4,3)$, $M_3(6,2)$; 5.28 $M_1(6,1)$, $M_2(5,3)$, $M_3(7,2)$;

5.29 $M_1(2,1)$, $M_2(0,3)$, $M_3(6,7)$; 5.30 $M_1(9,0)$, $M_2(4,1)$, $M_3(11,2)$.

VI) Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду, назвать и построить кривые.

6.01 $5x^2+7xy+9y^2-x-8y+11=0$; 6.02 $3x^2+2xy+5y^2-4y+27=0$;

6.03 $9x^2+5xy+4y^2+7x-7y+4=0$; 6.04 $4x^2-8xy+5y^2+5x-6y+11=0$;

6.05 $4x^2+3xy+8y^2-8y-3=0$; 6.06 $2x^2+4xy-7y^2-5x-4y-9=0$;

6.07 $8x^2+3xy+3y^2-5x-4y+9=0$; 6.08 $7x^2+4xy+8y^2-5y-4=0$;

6.09 $-3x^2+8xy+9y^2+7x+6y+5=0$; 6.10 $4x^2+3xy-5y^2+8x-7y+7=0$;

6.11 $5x^2+4xy+3y^2-2y+4=0$; 6.12 $7x^2+8xy+9y^2-3x-8y+4=0$;

6.13 $8x^2+9xy+7y^2-5x-8y+6=0$; 6.14 $12x^2+5xy+6y^2-4y=0$;

6.15 $7x^2+8xy-9y^2+8x-7y+3=0$; 6.16 $9x^2+5xy+3y^2-8x-6y+4=0$;

6.17 $13x^2+9xy-3y^2-8y=0$; 6.18 $9x^2+6xy+5y^2+2x-2y+8=0$;

6.19 $-x^2+5xy+8y^2-6x+5y+4=0$; 6.20 $3x^2+9xy+6y^2+2x-11y=0$;

6.21 $2x^2+7xy+y^2+2x-4y=0$; 6.22 $6x^2+2xy+y^2-2x-5y+7=0$;

6.23 $7x^2+2xy+15y^2+8x-4y+9=0$; 6.24 $9x^2+3xy+7y^2+2x+1=0$;

6.25 $3x^2+2xy+6y^2-5x-4y+8=0$; 6.26 $3x^2+2xy+2y^2+8x+9y+1=0$;

6.27 $3x^2+2xy-y^2-7x-4y+2=0$; 6.28 $7xy+7y^2-9x-3y+2=0$;

6.29 $5x^2+4xy+3y^2+11x-3y+12=0$; 6.30 $3x^2+6xy-7y^2+2x-4y+8=0$.

VII) Привести уравнения поверхностей к каноническому виду, назвать и построить поверхности.

7.01 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{11}=6$; 7.02 $2z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{7}$; 7.03 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{9}=4$;

7.04 $0{,}5x^2+y^2-z^2=5$; 7.05 $y^2=5x$; 7.06 $0{,}5x^2+y^2-z^2=-7$;

7.07 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=3$; 7.08 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{6}=-3$; 7.05 $z=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{8}$;

7.10 $2z=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{7}$; 7.11 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{5}=-15$; 7.12 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}=11$;

7.13 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{3}=21$; 7.14 $9z=\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}$; 7.15 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{7}=-4$;

7.16 $\frac{x^2}{2}+y^2-\frac{z^2}{3}=-7$; 7.17 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}-z^2=4$; 7.18 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}+z^2=4$;

7.19 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{4}=1$; 7.20 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{3}-z^2=0$; 7.21 $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{4}+2\frac{z^2}{7}=1$;

7.22 $3\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{2}=-18$; 7.23 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{7}=0$; 7.24 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{3}=5$;

7.25 $3z=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}$; 7.26 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-z^2=4$; 7.27 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{7}-\frac{z^2}{1}=0$;

7.28 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+z^2=1$; 7.29 $2x^2+5y^2+3z^2=11$; 7.30 $\frac{x^2}{2}+y^2+z^2=7$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном пособии изложены основные понятия аналитической геометрии: о векторах и операциях с ними; прямой на плоскости и в пространстве, плоскости, их взаимном расположении; кривых и поверхностях второго порядка. Для закрепления теоретических знаний по аналитической геометрии в данном пособии приведены примеры решения задач и контрольные задания. Пособие ориентировано на развитие у студентов навыков графического представления функций многих переменных в рамках освоения компетенций ОПК-1 (Способность применять математический инструментарий для решения экономических задач) и ПК-1 (Способность подготавливать исходные данные, необходимые для расчета экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйственных субъектов) образовательного стандарта по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность», что соответствует разделу «Математический анализ» курса «Математика». В результате изучения данного раздела студенты должны знать основные понятия о векторах; прямой и плоскости; кривых и поверхностях второго порядка, а также уметь решать связанные с ними задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д.В. Беклемишев. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - 10-е изд., испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 304 с.
2. Н.В. Ефимов. Краткий курс аналитической геометрии: Учебн. пособие. - 13-е изд., стереот. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 240 с.
3. Г.И. Просветов. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения. - М.: Альфа-Пресс, 2009. - 208 с.
4. С.Б. Кадомцев. Аналитическая геометрия и линейная алгебра - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 160 с.
5. В.П. Минорский. Сборник задач по высшей математике. - М.: Издательство Физико-математической литературы, 2004. - 336 с.

Евгений Леонидович **Панкратов**

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебно-методическое пособие